Д.Ф. Базылев

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

# ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Д. Ф. Базылев

# СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ: ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Минск
НТЦ “АПИ”
1999

УДК 51(035.5)
ББК 22.1 я 2
Б 17



Рецензент
кандидат физико-математических наук
Б. В. Задворный

**Базылев Д. Ф.**

Б 17 Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения. – Мн.: НТЦ “АПИ”, 1999.– 160 с.
ISBN 985-6344-27-1

Книга предназначена для развития навыков в решении целочисленных уравнений и для подготовки учащихся к математическим олимпиадам.

**УДК 51(035.5)**
**ББК 22.1 я 2**

**Справочное издание**

**Базылев Дмитрий Федорович**

**СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ: ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ**

Редактор *А. К. Хоревская*

Технический редактор *Т. В. Летьен*
Компьютерная верстка *А. А. Говорун*

Подписано в печать 18.10.99. Формат $84 \times 108^{1}/_{32}$ Бумага газетная Гарнитура Таймс. Офсетная печать
Усл -печ л 8,40 Усл –кр -отт 8,62 Уч -изд л 9,0 Тираж 3000 Заказ 2483.

НТЦ“АПИ”. Лицензия ЛВ № 52 от 22 10 97
220102, Минск, ул Социалистическая, 9, оф. 102

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в типографии издательства “Белорусский Дом печати” 220013, Минск, пр Ф Скорины, 79
Качество печати соответствует качеству диапозитивов, представленных издателем

ISBN 985-6344-27-1

# Предисловие

Настоящая книга содержит более 200 задач, которые так или иначе связаны с решением диофантовых уравнений, а именно уравнений в целых и рациональных числах.

В первой теме подробно рассмотрены линейные уравнения в целых числах. Вторая тема направлена на изучение задач, связанных с целочисленным уравнением $x^2+y^2=z^2$. Третья посвящена изучению отдельных вопросов, имеющих отношение к совершенным числам. В четвертой теме представлены некоторые факты теории чисел, которые наиболее часто используются при решении задач настоящего пособия. Значительная часть книги состоит из задач, в основном олимпиадного характера. Каждая задача снабжена подробным решением.

Для более эффективного усвоения материала рекомендуется основательно разобраться в предлагаемых решениях и попытаться найти иные способы решений или доказательств.

# Тема 1. Линейные диофантовы уравнения

Простейшим видом уравнений в целых числах являются уравнения вида $ax + by = c$, **(1)**

где $a$, $b$, с – заданные целые числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Для решения уравнения (1) в целых числах потребуются некоторые факты теории чисел.

*Теорема 1.1.* (деление с остатком).

Пусть $a$, $b$ целые числа, отличные от нуля, тогда существует единственная пара целых чисел $(q, r)$ таких, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < |b|$.

Доказательство.

Пусть для определенности $b > 0$. Выберем целое число $q$ таким, что $q \leq \dfrac{a}{b} < q + 1$, тогда $bq \leq a < bq + b$, значит $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$. Существование пары чисел $(q, r)$ доказано. Предположим, существует другая пара целых чисел $(q_1, r_1)$ такая, что $a = bq_1 + r_1$, причем $0 \leq r_1 < |b|$, тогда $bq + r = bq_1 + r_1$, откуда

$$q_1 - q = \frac{r - r_1}{b}. \qquad \textbf{(2)}$$

Так как $0 \leq r < b$, $0 \leq r_1 < b$, то $-b < r - r_1 < b$, т.е. $-1 < \dfrac{r - r_1}{b} < 1$, $-1 < q_1 - q < 1$, значит $q_1 - q = 0 \Leftrightarrow q = q_1$, следовательно, $r = r_1$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Наибольший общий делитель чисел $a$, $b$ будем обозначать символом $(a, b)$. Для нахождения наибольшего общего делителя чисел $a$, $b$ удобно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм Евклида.

Выберем наибольшее по модулю из чисел $a$, $b$. Пусть для определенности $|a| > |b|$ (Если $|a| = |b|$, то $(a, b) = |a| = |b|$).

1. Разделим $a$ на $b$ с остатком:

$$a = bq_1 + r_1, \text{ где } 0 \leq r_1 < |b|; \qquad \textbf{(3)}$$

разделим $b$ на $r_1$ с остатком:

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ где } 0 \leq r_2 < r_1; \qquad \textbf{(4)}$$

разделим $r_1$ на $r_2$ с остатком:

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ где } 0 \le r_3 < r_2; \quad \text{и т.д.}$$

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k, \text{ где } 0 \le r_{k-2} < r_{k-1}; \tag{5}$$

$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1}, \text{ где } 0 \le r_{k+1} < r_k; \tag{6}$$

$$r_k = q_{k+2} r_{k+1}. \tag{7}$$

3. Последний ненулевой остаток является наибольшим общим делителем чисел $a$, $b$, т.е. $r_{k+1} = (a, b)$. (Если $b$ делит $a$, то $(a, b) = |b|$).

Доказательство.

Покажем, что процедура деления с остатком в алгоритме Евклида имеет конечное число шагов. Действительно, $|b| > r_1 > r_2 > \ldots$, причем $r_1 \ge 0,\ r_2 \ge 0, \ldots$ , значит $k \le |b|$, т.е. число шагов конечно.

Пусть $d = (a, b)$, $D = r_{k+1}$.

Так как $d$ делит числа $a$, $b$, то из (3) $d$ делит $r_1$.

Так как $d$ делит $b$, $r_1$, то из (4) $d$ делит $r_2$ и т.д.

Так как $d$ делит $r_{k-1}$, $r_k$, то из (6) $d$ делит $r_{k+1} = D$.

Из (7) $D$ делит $r_k$. Так как $D$ делит $r_k$, $r_{k+1}$, то из (6) $D$ делит $r_{k-1}$. Так как $D$ делит $r_{k-1}$, $r_k$, то из (5) $D$ делит $r_{k-2}$ и т.д. Так как $D$ делит $r_1$, $r_2$, то из (4) $D$ делит $b$. Так как $D$ делит $r_1$, $b$, то из (3) $D$ делит $a$, значит $D$ делит $(a,b) = d$. Так как $d$ делит $D$, $D$ делит $d$, то $d = D$, что и требовалось доказать.

*Теорема 1.2.*

Пусть $d = (a, b)$, тогда существуют целые числа $m$, $n$ такие, что $am + bn = d$.

Доказательство.

Согласно алгоритму Евклида, имеем

$$d = r_{k+1} = r_{k-1} - r_k q_{k+1} = r_{k-1} - q_{k+1}(r_{k-2} - q_k r_{k-1}) = \ldots = ma + nb,$$

где $m$, $n$ – некоторые целые числа.

Теорема доказана.

Пример 1. Найдите (187,55).

$$187 = 3 \cdot 55 + 22$$

$$55 = 2 \cdot 22 + 11$$

$$22 = 2 \cdot 11,$$

значит $(187, 55) = 11$, причем $11 = 55 - 2 \cdot 22 = 55 - 2(187 - 3 \cdot 55) = 7 \cdot 55 + (-2) \cdot 187$.

*Теорема 1.3.*

Уравнение $ax + by = c$ разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда $(a, b)$ делит $c$.

Доказательство.

Пусть $d = (a, b)$. Так как $d$ делит $a$, $b$, то $d$ делит $ax + by$, т.е. $d$ делит $c$. Обратно, пусть $d$ делит $c$, т.е. $c = dk$, где $k \in Z$. Покажем, что уравнение (1) имеет решение в целых числах. Согласно теореме 1.2., существуют целые числа $m$, $n$ такие, что $am + bn = d$, значит $a\,(mk) + b\,(nk) = dk = c$, следовательно, пара чисел $(mk, nk)$ является решением (1).

Теорема доказана.

*Теорема 1.4.*

Если числа $a$, $b$ взаимно простые, т.е. $(a, b) = 1$ и $a$ делит $bc$, то $a$ делит $c$.

Доказательство.

Так как $(a, b) = 1$, то, согласно теореме 1.2., существуют целые $m$, $n$ такие, что $am + bn = 1$, значит $(ac)m + (bc)n = c$, причем $a$ делит $bc$, следовательно, $a$ делит $(ac)n + (bc)n = c$.

Теорема доказана.

Следующая теорема позволяет по заданному решению $(x_0, y_0)$ уравнения (1) находить все решения уравнения (1).

*Теорема 1.5.*

Пусть $(x_0, y_0)$ некоторое решение уравнения (1), тогда любое другое решение уравнения (1) имеет вид $x = x_0 + \frac{b}{d}t$, $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, где $d = (a, b)$, $t \in Z$.

Доказательство.

Пусть $ax_0 + by_0 = c$, $ax + by = c$, тогда, составив разность данных уравнений, получим $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$. Пусть $a = md$, $b = nd$, где $(m, n) = 1$, тогда $m\,(x - x_0) = n\,(y_0 - y)$. Так как $n$ делит $m\,(x - x_0)$, $(m, n) = 1$, то, согласно теореме 1.4., $n$ делит $x - x_0$, т.е. $x - x_0 = nt$, где $t \in Z$, значит $m\,(nt) = n\,(y_0 - y)$, следовательно, $y = y_0 - nt$, где $m = \frac{a}{d}$, $n = \frac{b}{d}$.

Теорема доказана.

Пример 2. Решите уравнение $15x + 84y = 39$ в целых числах.

Решение.

1. С помощью алгоритма Евклида находим $(84,15)$: $84=5\cdot 15+9$, $15=1\cdot 9+6$, $9=1\cdot 6+3$, $6=3\cdot 2$, значит $(84,15)=3$.

2. Так как $(84,15)=3$ делит 39, то, согласно теореме 1.3., уравнение $15x+84y=39$ имеет решение в целых числах.

3. Из 1. имеем $3=9-1\cdot 6=9-1(15-1\cdot 9)=2\cdot 9-1\cdot 15=$ $=2(84-5\cdot 15)-1\cdot 15=2\cdot 84+(-11)\cdot 15$, значит $39=26\cdot 84+$ $+(-143)15$. Итак, $(-143,26)$ является частным решением исходного уравнения.

4. По теореме 1.5. находим все решения исходного уравнения $x=-143+\frac{84}{3}t$, $y=26-\frac{15}{3}t$, т.е. $x=-143+28t$, $y=26-5t$.

Ответ: $\{(-143+28t,26-5t):t\in Z\}$.

Методом математической индукции можно показать, что уравнение $a_1x_1+...+a_nx_n=b$, где $a_1,...,a_n,b$ – заданные целые числа $(a_1\neq 0,...,a_n\neq 0)$, разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель чисел $a_1,...,a_n$ делит $b$.

Пример 3. Решите уравнение $6x+10y+15z=7$ в целых числах.

Решение.

Имеем $(6x+10y)+15z=7$, $2(3x+5y)+15z=7$. Пусть $3x+5y=w$, тогда $2w+15z=7$. **(8)**

Решим уравнение (8) в целых числах.

Согласно алгоритму Евклида, имеем $15=7\cdot 2+1$, $7=7\cdot 1$, значит $(15,2)=1$, причем $1=2\cdot(-7)+15\cdot 1$, следовательно, $2(-49)+15\cdot 7=7$, т.е. $(-49,7)$ является частным решением уравнения (8). По теореме 1.5. находим $w=-49+15u$, $z=7-2u$, где $u\in Z$. Имеем $3x+5y=-49+15u$. Согласно алгоритму Евклида, имеем $5=1\cdot 3+2$, $3=1\cdot 2+1$, $2=2\cdot 1$, значит $(5,3)=1$, причем $1=3-1\cdot 2=3-1(5-1\cdot 3)=2\cdot 3+5(-1)$, значит $3(30u-98)+$ $+5(49-15u)=-49+15u$, т.е. для каждого $u\in Z$ пара чисел $(30u-98,49-15u)$ является частным решением уравнения $3x+5y=-49+15u$, значит, согласно теореме 1.5., находим $x=(30u-98)+5v$, $y=(49-15u)-3v$, где $v\in Z$.

Ответ: $\{(30u-98+5v,\ 49-15u-3v,\ 7-2u):u,v\in Z\}$.

## Тема 2. Уравнение $x^2+y^2=z^2$ и его приложения

Теперь рассмотрим некоторые уравнения старших степеней, в частности те, которые связаны с диофантовым уравнением $x^2+y^2=z^2$. Прежде всего покажем справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1.

1) Пусть $xy=z^n$, $(x,y)=1$, где $x,y,z,n\in N$ $(n\geq 2)$, тогда существуют натуральные числа $t$, $s$, такие, что $x=t^n$, $y=s^n$.

2) Если $a\in Q, a^n\in N$, где $n\in N$, то $a\in N$.

3) Если $a\in N, \sqrt[n]{a}\in Q$, где $n\in N$, то $\sqrt[n]{a}\in N$.

Доказательство.

1) Предположим, существует некоторое множество троек чисел $(x,y,z)$, удовлетворяющих условию леммы, причем хотя бы одно из чисел $x$, $y$ не является $n$-ой степенью, например $x$. Выберем из данного множества ту тройку чисел $(x,y,z)$, для которой $x$ является наименьшим возможным значением из данного множества. Пусть простое число $p$ делит $x$, т.е. $x=px_1$, тогда $px_1y=z^n$, значит $p$ делит $z^n$, следовательно, $p$ делит $z$, т.е. $z=pz_1$.

Имеем $px_1y=(pz_1)^n \Leftrightarrow x_1y=p^{n-1}z_1{}^n$.

Так как $p$ делит $x$, $(x,y)=1$, то $p$ не делит $y$.

Так как $p$ не делит $y$, $p^{n-1}$ делит $x_1y$, то $p^{n-1}$ делит $x_1$ т.е. $x_1=p^{n-1}t$, $x=px_1=p^nt$.

Так как $x$ не является $n$ - ой степенью, то $t$ не является $n$ - ой степенью, причем $xy=z^n \Leftrightarrow (p^nt)y=(pz_1)^n \Leftrightarrow ty=z_1{}^n$.

Итак, тройка чисел $(t,y,z_1)$ содержится в исходном множестве, причем $x=p^nt>t$, что противоречит определению $x$, следовательно, $x$, $y$ являются $n$ - ми степенями.

2) Пусть $a=\dfrac{m}{k}$, $a^n=l$, где $m,k,l\in N$, $(m,k)=1$.

Имеем $\left(\dfrac{m}{k}\right)^n=l \Leftrightarrow m^n=lk^n$.

Так как $(m,k)=1$, то $(m^n,k^n)=1$, причем $k^n$ делит $m^n$, значит $k^n=1$, т.е. $k=1$, следовательно, $a\in N$.

3) Пусть $\sqrt[n]{a}=\dfrac{m}{k}$, где $(m,k)=1$, тогда $\left(\dfrac{m}{k}\right)^n=a$, $m^n=ak^n$.

Так как $(m,k)=1$, то $(m^n,k^n)=1$, причем $k^n$ делит $m^n$, значит $k^n=1$, $k=1$, следовательно, $\sqrt[n]{a}=m\in N$.

Лемма доказана.

*Теорема 2.1.*

Всякое решение уравнения $x^2+y^2=z^2$ в натуральных числах задается в виде $x=(m^2-n^2)k$, $y=2mnk$, $z=(m^2+n^2)k$ или $x=2mnk$, $y=(m^2-n^2)k$, $z=(m^2+n^2)k$, где целые числа $m$, $n$, $k$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $(m,n)=1$, $(x,y)=k$.

2) числа $m$, $n$ различной четности.

3) $m>n>0$, $k>0$.

(Для целочисленных решений уравнения $x^2+y^2=z^2$ не требуется выполнения условия 3)).

Доказательство.

Пусть $(x,y)=k$, тогда $x=ka$, $y=kb$, где $(a,b)=1$. Имеем $(ka)^2+(kb)^2=z^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=\left(\dfrac{z}{k}\right)^2$. Пусть $z=kc$, где $c\in Q$, тогда $a^2+b^2=c^2$. Так как $c\in Q$, $c^2\in N$, то, согласно лемме 2.1, $c\in N$. Так как $(a,b)=1$, то хотя бы одно из чисел $a$, $b$ является нечетным. Пусть для определенности $a$ нечетно. Предположим, $b$ нечетно, тогда $a^2,b^2$ при делении на 4 дают в остатке 1, значит $c^2$ при делении на 4 дает в остатке 2, что невозможно, ибо $c^2$ делится на 2, но не делится на 4. Итак, $b$ четно, значит $c^2=a^2+b^2$ нечетно, следовательно, $c$ нечетно. Имеем

$$b^2=(c-a)(c+a)\Leftrightarrow\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{c-a}{2}\frac{c+a}{2}. \qquad \textbf{(1)}$$

Покажем, что $\left(\dfrac{c-a}{2},\dfrac{c+a}{2}\right)=1$. Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $\dfrac{c\pm a}{2}$, тогда $p$ делит $\dfrac{c+a}{2}\pm\dfrac{c-a}{2}$, т.е. $p$ делит числа $a$, $c$, значит $p$ делит $b^2 = c^2 - a^2$, следовательно, $p$ делит $b$, что невозможно, так как $(a, b) = 1$. Из (1), согласно лемме 2.1., имеем $\frac{c-a}{2} = n^2$, $\frac{c+a}{2} = m^2$, значит $c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$, причем $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = m^2 n^2$, следовательно, $b = 2mn$, где $(m, n) = 1$.

Теорема доказана.

Следствие 2.1.

Пусть $x^2 + y^2 = z^2$, где $x, y, z \in N$, причем $(x, y) = 1$, или $(y, z) = 1$, или $(z, x) = 1$, тогда существуют $m, n \in N$ такие, что $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$ или $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$, где $m > n > 0$, $(m, n) = 1$, числа $m$, $n$ различной четности.

Замечание. Если $x^2 + y^2 = z^2$, где $x, y, z \in N$, причем $(x, y) = 1$, или $(y, z) = 1$, или $(z, x) = 1$, то тройка чисел $(x, y, z)$ называется примитивной пифагоровой тройкой.

Пример 1. Докажите, что уравнение $x^4 + y^4 = z^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение.

Предположим, исходное уравнение разрешимо в натуральных числах. Пусть $(x, y) = d$, т.е. $x = da$, $y = db$, где $(a, b) = 1$, тогда $a^4 + b^4 = \left(\frac{z}{d^2}\right)^2$. Пусть $z = d^2 c$, где $c \in Q$, тогда

$$a^4 + b^4 = c^2. \qquad (1)$$

Так как $c \in Q$, $c^2 \in N$, то, согласно лемме 2.1., $c \in N$. Среди всех возможных решений уравнения (1) выберем решения с наименьшим возможным значением $c$. Имеем $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$, причем $(a, b) = 1$, значит $(a^2, b^2) = 1$, следовательно, $(a^2, b^2, c)$ образуют примитивную пифагорову тройку, следовательно, существуют $m, n \in N$ такие, что $a^2 = m^2 - n^2$, $b^2 = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, где $m$, $n$ различной четности, $(m, n) = 1$, $m > n$, значит $a^2 = m^2 - n^2$ является нечетным. Предположим, $m$ четное, $n$ нечетное, тогда $n^2, a^2$ при делении на 4 дает в остатке 1, значит $m^2 = a^2 + n^2$ дает в остатке 2, т.е. $m^2$ делится на 2, но не делится на

4, что невозможно. Итак, $m$ нечетное, $n$ четное, причем $(a, n, m)$ образуют примитивную пифагорову тройку, следовательно, существуют $p, q \in N$ такие, что $a = p^2 - q^2$, $n = 2pq$, $m = p^2 + q^2$, где $p$, $q$ различной четности, $(p, q) = 1$, $p > q$, причем $b^2 = 2mn$, значит $b^2 = 4pq(p^2 + q^2)$, следовательно, $b = 2h$, $h \in N$, тогда

$$h^2 = pq(p^2 + q^2). \qquad (2)$$

Предположим, существует простое $r$, которое делит $pq$, $p^2 + q^2$. Так как $r$ делит $pq$, то пусть для определенности $r$ делит $p$, значит $r$ делит $(p^2 + q^2) - p^2 = q^2$, т.е. $r$ делит $q$, что невозможно, ибо $(p, q) = 1$. Итак, $(pq, p^2 + q^2) = 1$, значит из (2), согласно лемме 2.1., $pq = s^2$, $p^2 + q^2 = t^2$, где $s, t \in N$. Так как $pq = s^2$, $(p, q) = 1$, то $p = u^2$, $q = v^2$, где $u, v \in N$, значит $(u^2)^2 + (v^2)^2 = t^2$, т.е. $u^4 + v^4 = t^2$, причем $c = m^2 + n^2 > m = p^2 + q^2 = t^2 \geq t$, т.е. $c > t$, что противоречит определению числа $c$. Получено противоречие. Что и требовалось доказать.

Пример 2.

Докажите, что система $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 - t^2 \\ xy = zt \end{cases}$ неразрешима в натуральных числах.

Решение.

Покажем справедливость следующей леммы.

Лемма 2.2. Если $xy = zt$, где $x, y, z, t \in N$, то существуют $a, b, c, d \in N$ такие, что $x = ab$, $y = cd$, $z = ac$, $t = bd$, причем $(b, c) = 1$.

Доказательство.

Пусть $(z, x) = a$, тогда $x = ab$, $z = ac$, где $(b, c) = 1$. Имеем $(ab)y = (ac)t$, $by = ct$. Так $b$ делит $ct$, $(b, c) = 1$, то $b$ делит $t$, т.е. $t = bd$, где $d \in N$, тогда $by = c(bd)$, $y = bc$, что и требовалось доказать.

Предположим, исходная система разрешима в натуральных числах. Пусть $w = (x, y, z, t)$, т.е. $x = aw$, $y = bw$, $z = cw$, $t = dw$, где $(a,b,c,d)=1$, тогда $\begin{cases} a^2+b^2=c^2-d^2 \\ ab=cd \end{cases}$. Среди всех решений данной системы выберем решение с наименьшим значением $c$. Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $a$, $b$, тогда $p$ делит $cd=ab$, значит $p$ делит $c$ или $p$ делит $d$. Пусть для определенности $p$ делит $c$, тогда $p$ делит $d^2=c^2-a^2-b^2$, следовательно, $p$ делит $d$, что невозможно, ибо $(a,b,c,d)=1$. Итак, $(a,b)=1$. Аналогично $(c,d)=1$. Так как $ab=cd$, то, согласно лемме 2.2., существуют $p,q,r,s \in N$, такие, что $a=pq$, , $b=rs$, $c=pr$, $d=qs$, причем $a^2+b^2=c^2-d^2$, значит

$$p^2q^2+r^2s^2=p^2r^2-q^2s^2 \Leftrightarrow (p^2+s^2)(q^2+r^2)=2p^2r^2. \qquad \textbf{(3)}$$

Так как $(a,b)=1$, то $(p,s)=1$, $(q,r)=1$, ибо $a=pq$, $b=rs$, значит $(p^2+s^2,p^2)=1$, $(q^2+r^2,r^2)=1$, следовательно, из (3)

$$\begin{cases} p^2+s^2=2r^2 \\ q^2+r^2=p^2 \end{cases} \quad \textbf{(4)} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p^2+s^2=r^2 \\ q^2+r^2=2p^2 \end{cases}. \qquad \textbf{(5)}$$

Предположим, $c$ четно, тогда $c^2=a^2+b^2+d^2$ делится на 4, следовательно, $a$, $b$, $d$ четные, что невозможно, ибо $(a,b,c,d)=1$. Действительно, если хотя бы одно из чисел $a$, $b$, $d$ является нечетным, то $a^2+b^2+d^2$ при делении на 4 дает в остатке 1, 2, 3, что невозможно. Итак, $c$ нечетно, следовательно $c^2$ при делении на 4 дает в остатке 1, значит среди чисел $a$, $b$, $d$ ровно одно нечетное, остальные два четные. Если $a$, $b$ четные, тогда $c$, $d$ нечетные, что невозможно, ибо $ab=cd$. Пусть для определенности $a$ нечетно, тогда $b$, $d$ четные, значит $p$, $q$, $r$ нечетные, $s$ четно, следовательно, $p^2 \neq q^2+r^2$, т.е. (4) неразрешима. Рассмотрим (5). Имеем

$$\begin{cases} p^2+s^2=r^2 \\ (p^2+s^2)+(q^2+r^2)=r^2+2p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2+s^2=r^2 \\ q^2+s^2=p^2 \end{cases}, \text{ причем}$$

$(p,s)=1$, значит $(p,s,r)$, $(q,s,p)$ являются примитивными пифагоровыми тройками, следовательно,

$$\begin{cases} p=g^2-h^2, s=2gh, r=g^2+h^2 \\ q=u^2-v^2, s=2uv, p=u^2+v^2 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} g^2-h^2=u^2+v^2 \\ gh=uv \end{cases}, \text{ где}$$

$(g,h)=1$, $(u,v)=1$.

Таким образом, набор $(u, v, g, h)$ удовлетворяет системе $\begin{cases} a^2+b^2=c^2-d^2 \\ ab=cd \end{cases}$, причем $c=pr \ge r=g^2+h^2>g$, что противоречит определению $c$.

Итак, исходная система неразрешима.

Пример 3.

Пусть $r$, $R$ – радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами. Докажите, что величины $r$, $R$ одновременно не являются полными квадратами.

Решение.

Пусть $a$, $b$ – катеты, $c$ – гипотенуза данного треугольника. Предположим, $r=u^2$, $R=v^2$, где $u, v \in N$. Имеем $u^2=r=\frac{1}{2}(a+b-c)$, $v^2=R=\frac{c}{2}$, т.е. $\begin{cases} a+b-c=2u^2 \\ c=2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a+b=2u^2+2v^2 \\ a^2+b^2=\left(2v^2\right)^2 \end{cases}$. Так как $a+b$ четно, то $a-b=(a+b)-2b$ также четно. Пусть $w=\frac{a-b}{2}$, где $w \in N$. Имеем

$$w^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)^2}{4}=\frac{2\left(2v^2\right)^2-\left(2u^2+2v^2\right)^2}{4}=$$

$$=v^4-2u^2v^2-u^4.$$

Итак, $v^4-2u^2v^2-u^4=w^2$.

Пусть $(u, v)=d$, т.е. $u=md$, $v=nd$, где $(m, n)=1$, тогда $n^4-2m^2n^2-m^4=\left(\frac{w}{d^2}\right)^2$. Пусть $\frac{w}{d^2}=k$, где $k \in Q$. Так как $k \in Q$, $k^2 \in N$, то $k \in N$. Имеем $n^4-2m^2n^2-m^4=k^2$. **(6)**

Выберем решение уравнения (6) с наименьшим возможным значением $m$. Имеем $\left(n^2-m^2\right)^2-k^2=2m^4 \Leftrightarrow \left(n^2-m^2-k\right)\cdot$ $\cdot\left(n^2-m^2+k\right)=2m^4$. Так как числа $n^2-m^2 \pm k$ одинаковой четности, ибо $\left(n^2-m^2+k\right)-\left(n^2-m^2-k\right)=2k$ и произведение этих чисел четно, то и сами числа являются четными, значит $\frac{n^2-m^2+k}{2}\frac{n^2-m^2-k}{2}=\frac{m^4}{2}$, т.е. $\frac{m^4}{2}\in N$, тогда $m=2l$, где $l\in N$. Имеем $\frac{n^2-4l^2+k}{2}\frac{n^2-4l^2-k}{2}=8l^4$. (7)

Так как $m$ четно, $(m,n)=1$, то $n$ нечетно. Предположим, существует простое $p$, которое делит $\frac{n^2-4l^2\pm k}{2}$, тогда $p$ делит сумму этих чисел, а именно $n^2-4l^2$, причем из (7) $p$ делит $8l^4$. Так как $p$ делит нечетное число $n^2-4l^2$, то $p$ нечетно, причем $p$ делит $8l^4$, значит $p$ делит $l$, тогда $p$ делит $(n^2-4l^2)+4l^2=n^2$, т.е. $p$ делит $n$, причем $p$ делит $m=2l$, что невозможно, ибо $(m,n)=1$. Итак, числа $\frac{n^2-4l^2\pm k}{2}$ взаимно просты, тогда из (7) имеем

$$\begin{cases}\frac{n^2-4l^2-k}{2}=s^4\\ \frac{n^2-4l^2+k}{2}=8t^4\\ l=st\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\frac{n^2-4l^2-k}{2}=8t^4\\ \frac{n^2-4l^2+k}{2}=s^4\\ l=st\end{cases}$$

, где $(s,t)=1$. В любом случае $\begin{cases}n^2-4l^2=8t^4+s^4\\ l=st\end{cases}$, т.е.

$$s^4+4s^2t^2+8t^4=n^2 \Leftrightarrow \left(s^2+2t^2\right)^2+\left(2t^2\right)^2=n^2. \qquad (8)$$

Так как $n$ нечетно, то из (8) $s$ нечетно. Так как $(s,t)=1$, то $(s^2+2t^2,2t^2)=1$, значит $(s^2+2t^2,2t^2,n)$ образуют примитивную пифагорову тройку, тогда $s^2+2t^2=q^2-r^2$, $2t^2=2qr$, $n=q^2+r^2$, т.е. $\begin{cases}s^2=q^2-2qr-r^2\\ t^2=qr\end{cases}$, где $(q,r)=1$, значит $q=g^2$, $r=h^2$, $t=gh$, ибо $t^2=qr$, $(q,r)=1$, тогда $g^4-2g^2h^2-h^4=s^2$, следовательно, тройка чисел $(g,h,s)$ удовлетворяет уравнению (6), причем $m=2l>l=st\geq t=gh\geq h$, т.е. $m>h$, что противоречит определению $m$, что и требовалось доказать.

# Тема 3. Совершенные числа

В арифметике есть много чисел, изучение которых вызывает особенный интерес. В частности, к таким числам относятся так называемые совершенные числа, а именно такие числа, которые вдвое меньше суммы всех своих делителей. Задачей нахождения совершенных чисел занимались еще древние греки. Тем не менее интерес к совершенным числам нисколько не уменьшился. А связано это с безуспешными попытками найти все совершенные числа.

Евклид показал, что если $2^n - 1$ является простым, то $2^{n-1}\left(2^n - 1\right)$ является совершенным, а Эйлер установил, что любое четное совершенное число имеет евклидов вид. Итак, справедлива следующая теорема.

*Теорема 3.1.*

Четное число является совершенным тогда и только тогда, когда оно имеет вид $2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$, где $\left(2^p - 1\right)$ – простое число.

Доказательство.

Докажем, что если $2^p - 1$ – простое, то число $2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ совершенно. Пусть $q = 2^p - 1$, тогда делителями числа $2^{p-1}q$ являются числа $1, 2, \ldots, 2^{p-1}q$, причем

$$1 + 2 + \ldots + 2^{p-1} + q\left(1 + \ldots + 2^{p-1}\right) = \left(2^p - 1\right) + q\left(2^p - 1\right) =$$
$$= \left(q + 1\right)\left(2^p - 1\right) = 2^p\left(2^p - 1\right) = 2\left(2^{p-1}\left(2^p - 1\right)\right),$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что любое четное совершенное число имеет вид $2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$, причем $\left(2^p - 1\right)$ – простое число.

Обозначим через $\sigma\left(n\right)$ сумму всех делителей числа $n$ и прежде, чем приступить к доказательству, покажем справедливость следующей леммы.

Лемма: если числа $a$, $b$ взаимно просты, то $\sigma\left(a\right)\sigma\left(b\right) = \sigma\left(ab\right)$.

Доказательство.

Если $a = 1$ или $b = 1$, тогда, очевидно, условие леммы выполнено. Пусть $a \geq 2, b \geq 2$. Пусть $a = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$, где $p_i$ – различные простые числа, $n_i$ – натуральные числа, тогда делители числа $a$ имеют вид $p_1^{i_1} \ldots p_k^{i_k}$, где $0 \leq i_1 \leq n_1, \ldots, 0 \leq i_k \leq n_k$, а их сумма равна

$$\sigma(a) = \left(1 + p_1 + \ldots + p_1^{n_1}\right) \ldots \left(1 + p_k + \ldots + p_k^{n_k}\right)$$

Пусть $b = q_1^{l_1} \ldots q_m^{l_m}$, где $q_i$ – различные простые числа, $l_i$ – натуральные числа, тогда

$$\sigma(b) = \left(1 + q_1 + \ldots + q_1^{l_1}\right) \ldots \left(1 + q_m + \ldots + q_m^{l_m}\right), \text{ значит}$$

$$\sigma(a)\sigma(b) = \left(1 + p_1 + \ldots + p_1^{n_1}\right) \ldots \left(1 + p_k + \ldots + p_k^{n_k}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 + q_1 + \ldots + q_1^{l_1}\right) \ldots \left(1 + q_m + \ldots + q_m^{l_m}\right).$$

Пусть $c = ab = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k} q_1^{l_1} \ldots q_m^{l_m}$, причем из взаимной простоты чисел $a$, $b$ заключаем, что $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l$ – различные простые числа, значит

$$\sigma(ab) = \sigma(c) = \left(1 + p_1 + \ldots + p_1^{n_1}\right) \ldots \left(1 + q_m + \ldots + q_m^{l_m}\right) = \sigma(a)\sigma(b),$$

что и требовалось доказать. Доказательство леммы закончено.

Итак, пусть $n$ – четное совершенное число, т.е. $\sigma(n) = 2n$. **(1)**

Представим $n$ в виде $n = 2^m k$, где $m, k \in N$, $k$ – нечетное число, тогда $2^m$, $k$ взаимно просты, значит, согласно лемме, $\sigma(n) = \sigma\left(2^m k\right) = \sigma\left(2^m\right)\sigma(k) = \left(1 + 2 + \ldots + 2^m\right)\sigma(k) = \left(2^{m+1} - 1\right)\sigma(k)$,

следовательно, из (1) $\left(2^{m+1} - 1\right)\sigma(k) = 2^{m+1} k$. **(2)**

Так как $2^{m+1} - 1$ делит $2^{m+1} k$, то $2^{m+1} - 1$ делит $k$, т.е. $k = \left(2^{m+1} - 1\right) l$, где $l \in N$, тогда из (2) $\sigma\left(\left(2^{m+1} - 1\right) l\right) = 2^{m+1} l$. Пусть $m + 1 = p$, тогда $\sigma\left(\left(2^p - 1\right) l\right) = 2^p l$. Предположим, $l > 1$. Если $l = 2^p - 1$, тогда $\sigma\left(\left(2^p - 1\right)^2\right) = 2^p\left(2^p - 1\right)$, однако

$$\sigma\left(\left(2^p - 1\right)^2\right) \geq 1 + \left(2^p - 1\right) + \left(2^p - 1\right)^2 = 2^p\left(2^p - 1\right) + 1 > 2^p\left(2^p - 1\right).$$

Получено противоречие. Если $l \neq 2^p - 1$, тогда

$$\sigma\left(\left(2^p - 1\right) l\right) \geq 1 + l + \left(2^p - 1\right) + \left(2^p - 1\right) l = 2^p l + 2^p > 2^p l.$$

Снова получено противоречие. Итак, $l=1$, тогда $\sigma\left(2^p-1\right)=2^p$.

Предположим, $2^p-1$ – составное число, тогда существует делитель числа $2^p-1$ такой, что $1<r<2^p-1$, тогда $\sigma\left(2^p-1\right)\geq 1+r+\left(2^p-1\right)>2^p$. Итак, $2^p-1$ – простое. Таким образом,

$$n=2^m k=2^m\left(2^{m+1}-1\right)l=2^m\left(2^{m+1}-1\right)=2^{p-1}\left(2^p-1\right).$$

Теорема доказана.

Фактически $2^p-1$ является простым, только в случае, когда $p$ простое число. Действительно, предположим, $p$ - составное число, т.е. $p=ab$, где $a,b\in N$, $1<a<p$, $1<b<p$, тогда $2^p-1=\left(2^a\right)^b-1=\left(2^a-1\right)\left(\left(2^a\right)^{b-1}+...+2^a+1\right)$ – составное число, что невозможно. Итак, $p$ – простое число.

Замечание. Простые числа вида $2^p-1$ называются простыми числами Мерсена.

Таким образом, задача о нахождении четных совершенных чисел сводится к нахождению простых чисел Мерсена. Вопрос же о том, существуют ли нечетные совершенные числа, является знаменитой нерешенной проблемой. Рассмотрение частных случаев этой проблемы указывает на то, что нечетных совершенных чисел не существует.

*Теорема 3.1.*

Квадраты нечетных чисел не являются совершенными.

Доказательство.

Пусть $n=p_1^{m_1}...p_k^{m_k}$, где $p_i$ – различные нечетные простые числа, $m_i\in N$, тогда $n^2=p_1^{2m_1}...p_k^{2m_k}$. Предположим, $n^2$ совершенно, тогда $\sigma\left(n^2\right)=2n^2 \Leftrightarrow \left(1+p_1+...+p_1^{2m_1}\right)\cdot$ $...\left(1+p_k+...+p_k^{2m_k}\right)=2p_1^{2m_1}...p_k^{2m_k}$. Однако последнее равенство невозможно, так как в левой части нечетное число, в правой - четное, что невозможно.

Теорема доказана.

*Теорема 3.2.*

Число $n=p^k$ не является совершенным, где $p$ – простое число, $k\in N$.

Доказательство.

Предположим, $n$ совершенно, тогда $\sigma(n) = 2n \Leftrightarrow$ $1 + p + ... + p^k = 2p^k$. Очевидно, $k \neq 1$, так как $p > 1$. Если $k > 1$, тогда $p\left(p^{k-1} - p^{k-2} - ... - 1\right) = 1$, значит $p$ делит 1, т.е. $p = 1$, что невозможно.

Теорема доказана.

*Теорема 3.3.*

Число $n = p^k q^m$ не является совершенным, где $p, q$ различные простые числа, $m, k \in N$. $(p > 2, q > 2)$.

Доказательство.

Предположим, $n$ совершенно, тогда $\sigma(n) = 2n$, т.е.

$$\left(1 + p + ... + p^k\right)\left(1 + q + ... + q^m\right) = 2p^k q^m. \qquad (3)$$

Заметим, что

$$\text{НОД}\left(1 + p + ... + p^k, p^k\right) = 1, \text{НОД}\left(1 + q + ... + q^m, q^m\right) = 1.$$

Действительно, предположим, существует простое число $r$ такое, что $r$ делит $1 + p + ... + p^k$ и $p^k$.

Так как $r$ делит $p^k$, то $r = p$, ибо $p, r$ – простые, следовательно, $r = p$ не делит $1 + p + ... + p^k$. Получено противоречие.

Аналогично $\text{НОД}\left(1 + q + ... + q^m, q^m\right) = 1$. Следовательно, согласно равенству (3), имеем $\begin{cases} 1 + p + ... + p^k = 2q^m \\ 1 + q + ... + q^m = p^k \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 + p + ... + p^k = q^m \\ 1 + q + ... + q^m = 2p^k \end{cases}$.

Для определенности рассмотрим $\begin{cases} 1 + p + ... + p^k = 2q^m \\ 1 + q + ... + q^m = p^k \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} p^{k+1} - 1 = 2q^m(p - 1) \\ q^{m+1} - 1 = p^k(q - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\left(2q^m - p^k\right) = 2q^m - 1 \\ q\left(p^k - q^m\right) = p^k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 2q^m - p^k = s \\ p^k - q^m = t \end{cases} \\ ps = 2q^m - 1 \\ qt = p^k - 1 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p^k = 2t + s \\ q^m = t + s \end{cases} \\ ps = 2q^m - 1 \Rightarrow \\ qt = p^k - 1 \\ \end{cases} \begin{cases} ps = 2(s+t) - 1 \\ qt = (2t+s) - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$ps - qt = s \Leftrightarrow s(p-1) = qt\,. \tag{4}$$

Предположим, существует простое число $w$ такое, что $w$ делит числа $s$, $t$, тогда $w$ делит $(2t+s)$ и $(t+s)$, т.е. $w$ делит $p^k$ и $q^m$, что невозможно, так как $p$, $q$ различные простые числа. Итак, $w = 1$, т.е. НОД$(s,t) = 1$, причем, согласно (4), $s$ делит $qt$, значит $s$ делит $q$. Так как $ps = 2q^m - 1$, $s$ делит $q$, то $s$ делит $2q^m - ps = 1$, значит $s = 1$, причем $qt = 2t + s - 1$, следовательно, $qt = 2t \Leftrightarrow q = 2$, что невозможно. Получено противоречие.

Теорема доказана.

В настоящее время известно, что если нечетные совершенные числа и существуют, то в каноническом разложении на множители они содержат не менее 2800 различных простых множителей.

Тем не менее в общем случае вопрос о существовании нечетных совершенных чисел до сих пор остается открытым.

# Тема 4. Теоремы Эйлера, Вильсона и Ферма

Рассмотрим теоремы, имеющие широкое применение при решении диофантовых уравнений.

*Теорема 4.1.* (Малая теорема Ферма).

$a^p - a$ делится на простое число $p$ для любого натурального числа $a$. В частности, если $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} - 1$ делится на $p$.

Доказательство.

Если $p$ делит $a$, то $p$ делит $a^p - a$.

Пусть простое $p$ не делит $a$, т.е. $(a, p) = 1$. Разделим числа

$$a, 2a, \ldots, (p-1)a \text{ на число } p \text{ с остатком: } \begin{cases} a = pd_1 + r_1 \\ 2a = pd_2 + r_2 \\ \ldots \\ (p-1)a = pd_{p-1} + r_{p-1} \end{cases}, \quad (1)$$

где $d_i \in N$, $0 \le r_k \le p-1$.

Так как простое число $p$ не делит $a$, то ни одно из чисел $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ не делится на $p$, значит $r_i \ne 0$, т.е. $1 \le r_i \le p-1$.

Предположим, что $r_i = r_j$, где $i \ne j$, тогда $\begin{cases} a \cdot i = pd_i + r_i \\ a \cdot j = pd_j + r_j \Rightarrow \\ r_i = r_j \end{cases}$

$a \cdot i - a \cdot j = p(d_i - d_j)$, значит $p$ делит $a(i-j)$, что невозможно, так как $p$ не делит $a$, $p$ не делит $i-j$, ибо $0 < i < p$, $0 < j < p$, $-p < i-j < p$, причем $i \ne j$. Итак, остатки $r_i$ попарно различны, причем $1 \le r_1 \le p-1, \ldots, 1 \le r_{p-1} \le p-1$, значит числа $r_1, \ldots, r_{p-1}$ являются перестановкой чисел $1, 2, \ldots, p-1$, следовательно, $r_1 \ldots r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) = (p-1)!$

Перемножим все равенства системы (1), получим $a(2a)\ldots((p-1)a) = pA + r_1 \ldots r_{p-1}$, где $A \in N$, т.е. $(p-1)!a^{p-1} = pA + (p-1)!$, $(p-1)!(a^{p-1} - 1) = pA$.

Так как $p$ делит $(p-1)!(a^{p-1} - 1)$ и $p$ не делит $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$, то $p$ делит $a^{p-1} - 1$, следовательно, $p$ делит $a(a^{p-1} - 1) = a^p - a$.

Теорема доказана.

Пусть $\varphi(m)$ выражает число натуральных чисел, меньших натурального числа $m$ и взаимно простых с $m$.

Функция $\varphi(m)$ называется функцией Эйлера.

*Теорема 4.2.*

Пусть $(a,m)=1$, тогда $a^{\varphi(m)}-1$ делится на $m$.

Доказательство.

Пусть $k_1,\dots,k_l$ натуральные числа, меньшие $m$ и взаимно простые с $m$, т.е. $(k_i,m)=1$, тогда $\varphi(m)=l$. Разделим числа

$k_1a,\dots,k_la$ на число $m$ с остатком: $\begin{cases} k_1a=d_1m+r_1 \\ k_2a=d_2m+r_2 \\ \dots \\ k_la=d_lm+r_l \end{cases}$, **(2)**

где $0<r_i<m$, $i=1,2,\dots,l$.

Покажем, что $(r_i,m)=1$. Предположим, для некоторого $i$: $(r_i,m)\neq 1$, тогда существует простое число $p$, которое делит числа $r_i$, $m$, значит $p$ делит $k_ia=d_im+r_i$, следовательно, $p$ делит $k_i$ или $p$ делит $a$, что невозможно, ибо $(a,m)=1$ и $(k_i,m)=1$. Итак, $(r_i,m)=1$.

Покажем, что все $r_i$ попарно различны. Предположим, $r_i=r_j$, где $i\neq j$. Имеем $r_i=k_ia-d_im$, $r_j=k_ja-d_jm$, значит $k_ia-d_im=k_ja-d_jm \Leftrightarrow (k_i-k_j)a=(d_i-d_j)m$.

Так как $m$ делит $(k_i-k_j)a$, $(a,m)=1$, то $m$ делит $k_i-k_j$, однако $0<k_i<m$, $0<k_j<m$, значит $-m<k_i-k_j<m$, $-1<\dfrac{k_i-k_j}{m}<1$, следовательно, $\dfrac{k_i-k_j}{m}=0$, $k_i=k_j$, что невозможно, так как $k_1,\dots,k_l$ попарно различны.

Итак, все $r_i$ попарно различны.

Так как числа $r_1,\dots,r_l$ взаимно просты с $m$ и попарно различны, то $r_1,\dots,r_l$ являются некоторой перестановкой чисел $k_1,\dots,k_l$, следовательно, $r_1r_2\dots r_l=k_1k_2\dots k_l$. Перемножим все равенства системы (2), получим $k_1k_2\dots k_la^l=mA+r_1r_2\dots r_l$, где $A$ некоторое натуральное число, значит $k_1k_2...k_l(a^l-1)=mA$.

Так как $m$ делит $k_1k_2...k_l(a^l-1)$ и $(k_i,m)=1$, то $m$ делит $a^l-1$, т.е. $m$ делит $a^{\varphi(m)}-1$, что и требовалось доказать.

Заметим, что если $p$ простое число, то числа $1,2,...,(p-1)$ взаимно просты с $p$, значит $\varphi(p)=p-1$. Таким образом, малая теорема Ферма является частным случаем теоремы Эйлера.

Если $m=p^n$, где $p$ простое число, то $\varphi(m)=p^n-p^{n-1}$. Действительно, всякое натуральное число, имеющее с числом $p^n$ общий делитель, имеет вид $ps$, где $s\in N$, причем $ps\le p^n$, т.е. $s\le p^{n-1}$, следовательно, таких чисел ровно $p^{n-1}$, значит $\varphi(p^n)=p^n-p^{n-1}$.

Пусть $l_1={p_1}^{n_1}-{p_1}^{n_1-1},...,l_k={p_k}^{n_k}-{p_k}^{n_k-1}$, где $p_i$ различные простые числа, $n_i\in N$, т.е. $\varphi({p_1}^{n_1})=l_1,...,\varphi({p_k}^{n_k})=l_k$.

Пусть $a$ взаимно просто с $p_1,...,p_k$, тогда, согласно теореме 4.2., $a^{l_1}-1$ делится на ${p_1}^{n_1},...,a^{l_k}-1$ делится на ${p_k}^{n_k}$. Пусть $l=l_1l_2...l_k$, тогда $a^l-1$ делится на числа $a^{l_1}-1,...,a^{l_k}-1$, значит $a^l-1$ делится на числа ${p_1}^{n_1},...,{p_k}^{n_k}$, т.е. $a^l-1$ делится на $m$, где $m={p_1}^{n_1},...,{p_k}^{n_k}$, причем

$$l=l_1...l_k={p_1}^{n_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)...{p_k}^{n_k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

*Теорема 4.3.* (Эйлер).

Пусть $(a,m)=1$, тогда $a^l-1$ делится на $m$, где $m={p_1}^{n_1}...{p_k}^{n_k}$, $l=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.

Можно также показать, что $\varphi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=l$ для любого натурального числа $m$.

*Теорема 4.4.* (Вильсон).

Число $p$ является простым тогда и только тогда, когда $p$ делит $(p-1)!+1$.

Доказательство.

Пусть $p$ делит $(p-1)!+1$. Предположим, $p$ не является простым, тогда $p=mn$, где $1<m<p$, $1<n<p$, значит $m$ делит $(p-1)!+1=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m\cdot\ldots\cdot(p-1)+1=mA+1$, где $A$ некоторое натуральное число, следовательно, $m$ делит 1, т.е. $m=1$, что невозможно. Итак, $p$ простое число.

Обратно, пусть $p$ простое число, покажем, что $p$ делит $(p-1)!+1$. При $p=2;3;5$ теорема справедлива. Будем считать, $p>5$, тогда $\dfrac{p-1}{2}>2$.

Пусть $q$ целое число такое, что $1<q<p-1$. Покажем, существует целое $r$ $(1<r<p-1)$ такое, что $qr-1$ делится на $p$.

Так как $p$ простое, то $(q,p)=1$, значит, согласно теореме 1.2., существуют целые $m$, $n$ такие, что $pm+qn=1$. Разделим $n$ на $p$ с остатком, получим $n=dp+r$, где $1\le r\le p-1$ (если $r=0$, то $p$ делит $pm+q(dp)=pm+qn=1$, что невозможно). Имеем $pm+q(dp+r)=1 \Leftrightarrow qr-1=p(-m-dq)$, т.е. $p$ делит $qr-1$. Если $r=1$, то $p$ делит $q-1$, что невозможно, ибо $0<q-1<p-2$. Если $r=p-1$, то $p$ делит $q(p-1)-1=pq-(q+1)$, тогда $p$ делит $q+1$, что невозможно, ибо $2<q+1<p$. Итак, $p$ делит $qr-1$, где $1<q<p-1$, $1<r<p-1$. Предположим, существует целое $s$, такое, что $1<s<p-1$, $p$ делит $qs-1$, причем $s\ne r$, тогда $p$ делит $q(r-s)=(qr-1)-(qs-1)$, значит $p$ делит $q$ или $p$ делит $r-s$, однако $1<q<p-1$, значит $p$ не делит $q$; $-p<r-s<p$, значит $p$ не делит $r-s$. Итак, число $r$ единственное.

Предположим, $q=r$, тогда $p$ делит $qr-1=q^2-1=$ $=(q-1)(q+1)$, следовательно, $p$ делит $q-1$ или $p$ делит $q+1$, что невозможно, так как $0<q-1<p$, $0<q+1<p$, значит $q\ne r$.

Таким образом, каждому числу $q(1<q<p-1)$ соответствует единственное число $r$ $(1<r<p-1, r\ne q)$ такое, что $qr=pA+1$ для некоторого $A\in N$.

Итак, числа $2, 3, \ldots, p-2$ можно объединить в $\frac{p-3}{2}$ пары, такие, что произведение чисел в каждой паре имеет вид $pA+1$. Почленно перемножим все такие пары, получим $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2) = pa+1$, для некоторого $a \in N$, значит $(p-1)! = (p-2)!(p-1) = (pa+1)(p-1) = p(pa-a+1)-1$, т.е. $(p-1)!+1 = p(pa-a+1)$, следовательно, $p$ делит $(p-1)!+1$, что и требовалось доказать.

Следствие 4.1.

Простое число $p = 4n+1$ делит $m^2+1$, где $m = (2n)!$

Доказательство.

Согласно теореме Вильсона, $p = 4n+1$ делит $(p-1)!+1 = (4n)!+1 = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n))((2n+1) \ldots (4n)) + 1 = (2n)!(p-2n)\ldots$ $\ldots(p-1) = (2n)!(pk+(2n)!)+1 = ((2n)!)^2+1+pk(2n)!$, где $k \in N$, значит $p$ делит $((2n)!)^2+1$, что и требовалось доказать.

*Теорема 4.5.*

Пусть $p$ простое число вида $4n+3$ и пусть числа $a$, $b$ взаимно просты, тогда $a^2+b^2$ не делится на $p$.

Доказательство.

Предположим, простое $p = 4n+3$ делит $a^2+b^2$, где $(a, b) = 1$. Если при этом $p$ делит $a$, то $p$ делит $a^2$, $p$ делит $b^2 = (a^2+b^2)-a^2$, значит $p$ делит $b$, что невозможно, ибо $(a, b) = 1$. Итак, $p$ не делит $a$. Аналогично $p$ не делит $b$. Следовательно, согласно малой теореме Ферма, $p$ делит числа $a^{p-1}-1$ и $b^{p-1}-1$.

Так как $p$ делит $a^2+b^2$ и $a^2+b^2$ делит $(a^2)^{2n+1}+(b^2)^{2n+1} =$ $a^{4n+2}+b^{4n+2} = a^{p-1}+b^{p-1}$, то $p$ делит $a^{p-1}+b^{p-1} =$ $= (a^{p-1}-1)+(b^{p-1}-1)+2$, значит $p$ делит 2, что невозможно, ибо $p \geq 3$. Предположение неверно.

Теорема доказана.

## Задачи

1. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $(x-1)(y-2)=3$

2) $xy-2x+3y=5$

3) $7xy-6x-8y+7=0$

4) $axy+bx+cy+d=0$, где $a,b,c,d\in Z\,(a\neq 0)$.

2. Для каждого простого $p$ решите уравнение $\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ в натуральных числах.

3. (Евклид). Докажите, что простых чисел бесконечно много.

4. Докажите, что уравнение $x^2+x+1=py$ имеет решение в целых числах $(x,y)$ для бесконечного числа простых $p$.

5. 1) Докажите, что $p^2-q^2$ делится на 24, где $p,q$ простые числа, бóльшие 3.

2) Докажите, что $p^4-q^4$ делится на 240, где $p,q$ простые числа, бóльшие 5.

3) Докажите, что $p^6-q^6$ делится на 168, где $p,q$ простые числа, бóльшие 7.

6. Найдите все простые $p$, такие, что

1) $p+4$, $p+14$ простые

2) $8p^2+1$ простые

3) $p+10$, $p+1$ простые

4) $4p^2+1, 6p^2+1$ простые

5) $p^2-6$, $p^2+6$ простые

6) $p^4-6$ простое

7) $p^3+6$, $p^3-6$ простые

8) $p^2-2$, $2p^2-1$, $3p^2+4$ простые

9) $2^p+1$, $2^p-1$ простые

10) $p,q,p^q+q^p$ простые

7. Докажите, что если число $\overline{abc}$ делится на 37, то числа $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ также делятся на 37.

8. Существует ли натуральное число, которое при возведении в 1996 степень, оканчивается на 1996 ?

9. Найдите все натуральные числа $N$, произведение цифр которых равно $N^{1999}$.

10. Найдите все натуральные числа, равные сумме квадратов своих цифр.

11. 1) Решите уравнение $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=2{,}345$ в рациональных положительных числах.

2) Решите уравнение $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1999$ в попарно взаимно простых числах $x, y, z$.

12. Докажите, что следующие уравнения разрешимы в натуральных числах:

1) $x_1x_2...x_{1999} = x_1 + x_2+...+x_{1999}$

2) $x_1^2 + ... + x_{1999}^2 = y^2$

3) $x^2 + y^2 = 1997^{1999}$.

13. Докажите, что следующие уравнения имеют бесконечно много решений в целых числах:

1) $y^2 - 2x^2 = 1$

2) $xy + yz + zx = 1$.

14. Докажите, что следующие уравнения имеют бесконечно много решений в натуральных числах:

1) $x^2 + y^3 = z^5$

2) $x^2 + y^3 + z^5 = t^7$.

15. Докажите, что уравнение $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = t^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных взаимно простых числах.

16. Докажите, что для любого натурального $n$

1) уравнение $(x+1)^3+...+(x+n)^3 = y^3$ имеет решения в целых числах,

2) уравнение $n = x^2 + y^2 - z^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

17. Решите уравнение $x^{1996} = 1995y^{1995} + 1994$ в натуральных числах.

18. Решите уравнение $x_1^8+\ldots+x_8^8=1999$ в натуральных числах.

19. Решите уравнение $2p+1=q^3$ в натуральных числах, где $p$ простое.

20. Решите уравнение $px^2+qy^2=5pq$ в натуральных числах, где $p, q$ различные простые.

21. Пусть $x$, $y$ натуральные числа. Докажите, что хотя бы одно из чисел $x^2+y$, $y^2+x$ не является полным квадратом.

22. Решите уравнение $n!=20n^2$ в натуральных числах.

23. 1) Докажите, что остаток при делении простого числа $p$ на 30 является простым.

2) Пусть $r$ остаток при делении простого числа $p$ на 210. Найдите $r$, если известно, что $r$ составное число, $r$ представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

24. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $\overline{xxyy}=z^2$

2) $\overline{xxyy}=\overline{xx}^2+\overline{yy}^2$.

25. Докажите, что натуральное число $N(N>1)$ представимо в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел тогда и только тогда, когда $N$ не является степенью двойки.

26. Докажите, что следующие системы неразрешимы в натуральных числах:

$$1)\ \begin{cases} x^2+2y^2=z^2 \\ 2x^2+y^2=t^2 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x^2+5y^2=z^2 \\ 5x^2+y^2=t^2 \end{cases}.$$

27. Решите следующие уравнения в натуральных числах

1) $x^2-y^2=7$

2) $x^3-8y^3=19$

3) $x^m-y^m=5$, где $m\in N\ (m>1)$.

28. Решите уравнение $x^4(x^2-x^4+2y)=y^2+1999$ в целых числах.

29. Решите уравнение $x^{10}+5x^5-y^8-4y^4=1$ в целых числах.

30. 1) (Софи Жермен). Докажите, что число $n^4+4$ является составным для любого $n\in N\quad (n>1)$.

2) Докажите, что число $n^4+4^n k^4$ является составным для любых $n, k \in N$ $(n>1)$.

31. Решите уравнение $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$ в натуральных числах

32. Известно, что натуральные числа $x, y, z$ таковы, что $x+y+z$ делится на $x, y, z$. Найдите $x:y:z$.

33. Решите уравнение $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=3$ в целых числах.

34. Докажите, что если целые числа $a$, $b$, $c$, $d$ таковы, что $ad-bc=1$, то

1) дробь $\frac{an+b}{cn+d}$ несократима.

2) дробь $\frac{ac+bd}{a^2+b^2}$ несократима.

35. Решите уравнение $x^3+y^3+4=3(x+y)$

1) в натуральных числах

2) в целых числах.

36. Докажите, что хоты бы одно из чисел $m-\frac{1}{m}$, $m+\sqrt{1999}$ не является целым.

37. Докажите, что число $S=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ не является целым для любого $n \in N$ $(n>1)$.

38. Решите уравнение $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$ в целых числах.

39. 1) Решите уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ в натуральных числах.

2) Докажите, что для любого $n \in N$ $n \geq 3$ уравнение $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}=1$ имеет решение в натуральных числах, удовлетворяющее условию $x_1<x_2<...<x_n$.

3) Докажите, что для любого $n \in N$ уравнение $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}=1$ имеет конечное число решений в натуральных числах.

40. 1) Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1$ в натуральных числах.

2) Докажите, что уравнение $\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_s^2}=1$ не имеет решений в попарно различных натуральных числах.

3) Докажите, что для любого $n\in N$ $(n>1)$ уравнение $\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}$ имеет решение в натуральных числах, удовлетворяющее условию $x_0<x_1<\ldots<x_n$.

4) Найдите все $n\in N$, для которых уравнение $\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}$ разрешимо в натуральных числах.

41. Пусть $m,n,x\in N$ $(m>n)$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $x^{2^m}+1$, $x^{2^n}+1$ не делится на 1999.

42. Решите систему $\begin{cases}x+y+z=2m\\ xy+yz+zx=2n\end{cases}$ в натуральных числах, если известно, что $x$, $y$, $z$ простые.

43. Решите следующие уравнения в простых числах:

1) $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$

2) $p^2+q^3=r^4$.

44. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $x^2-10=7y$

2) $5x^2-7=11y$

3) $x^2-11y=15$.

45. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $x^2-2y^2=3$

2) $2x^2-5y^2=7$

3) $5x^2+6x+11=y^2+4y$.

46. Решите уравнение $x^{10}+y^{10}-z^{10}=1999$ в целых числах.

47. Решите уравнение $x^2+y^2+z^2+x+y+z=1$ в рациональных числах.

48. Решите уравнение $(x+y)^2=2(1000y-x-1)$ в целых числах.

49. Решите уравнение $(16x-21)yz+16(x+z)=21$ в натуральных числах.

50. Решите систему $\begin{cases} x^2+y-z=0 \\ y^2+x-z^2+2=0 \end{cases}$ в целых числах.

51. Решите систему $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$ в целых числах.

52. Решите систему $\begin{cases} x^2+6y^2=2z^2+3t^2 \\ xy=zt \end{cases}$ в целых числах.

53. Решите систему $\begin{cases} x+y=zt \\ xy=z+t \end{cases}$ в натуральных числах, где $x\le y$, $x\le z\le t$.

54. 1) Найдите все целые $n$, такие, что $x^{1999}$ делится на $x+n$ для любого целого $x$ $(x\ne -n)$.

2) Найдите все целые $n$, такие, что $x^3+y^3+3nxy$ делится на $x+y-n$ для любых целых $x, y$ $(x+y-n\ne 0)$.

55. Решите уравнение $(1+x)(1+x^2)=2^y$ в натуральных числах.

56. Для каждого натурального значения $n$ решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $x^2+y^2=2^n$

2) $x^2+y^2+z^2=2^n$

3) $x^2+y^2+z^2+t^2=2^n$.

57. Решите уравнение $y^2-5z^x=1$ в натуральных числах, где $z$ простое.

58. Решите уравнение $x^2-7y^2=2$ в рациональных числах.

59. Известно, что число $n$ содержит ровно 1999 делителей. Докажите, что $n$ не делится на 10.

60. Найдите все натуральные числа $n$, такие, что $n^2$ имеет в 3 раза больше делителей, чем $n$.

61. Найдите все натуральные числа $n$, такие, что $2n$ имеет ровно $n$ делителей.

62. Число $N$ увеличилось в $m$ раз после перестановки первой цифры числа $N$ на последнее место. Найдите допустимые значения $m$ $(N, m \in N)$.

63. Решите следующие системы в целых числах:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^2 = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

64. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $x(x+1) = 4y(y+1)$

2) $x(x+1) = p^{2n}y(y+1)$, где $n \in N$, $p$ простое.

65. Найдите все натуральные числа $x$, $y$, такие, что $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ является целым.

66. Решите уравнение $5(x^2 + y^2 - 1) = 8xy$ в целых числах.

67. Решите уравнение $x^2 - xy + y^2 = x + y$ в целых числах.

68. Решите уравнение $x^2 - xy + y^2 = x^2y^2$ в целых числах.

69. Решите уравнение $5(x+y)^3 = 54(x^2 + y^2)$ в натуральных числах.

70. 1) Докажите, что если $a, b$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ являются рациональными (целыми), то $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ являются рациональными (целыми).

2) Докажите, что если $a, b$, $c$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ являются рациональными (целыми), то $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ являются рациональными (целыми).

3) Докажите, что если $a, b$, $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ являются рациональными (целыми), то $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ являются рациональными (целыми).

71. Докажите, что следующие уравнения неразрешимы в натуральных числах:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1999}$

2) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{1999}$.

72 1) Докажите, что уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$ имеет решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда существует целое $m$, большее 1, такое, что $m^2$ делит $n$.

2) Докажите, что уравнение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{n}$ имеет решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда существует целое $m$, большее 1, такое, что $m^3$ делит $n$.

73. Докажите, что уравнение $\sqrt{x^2+1999}+\sqrt{y^2+1999}=1999$ не имеет решений в целых числах.

74. Докажите, что уравнение $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$ не имеет решений в целых числах.

75. Известно, что $(2a+1)^2+b^2$ простое, где $a$, $b$ целые числа. Найдите $a$, $b$, если известно, что корни уравнения $x^2+(2a+1)x+b+1=0$ выражаются целыми числами.

76. Решите уравнение $x!+y!=z!$ в натуральных числах.

77. Решите уравнение $x^{xy-x^y}=y^{x^y}$ в натуральных числах.

78. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $n^x+n^y=n^z$

2) $n^x+n^y+n^z=n^t$.

79. Докажите, что для любого нечетного натурального значения $n$ число $2^{n!}-1$ делится на $n$.

80. Докажите, что уравнение $x+y\sqrt{z}=\sqrt[3]{1999}$ не имеет решений в рациональных числах.

81. Решите следующие системы в целых числах:

1) $\begin{cases} x^3-x^2-2=y \\ y^3-y^2-2=x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-x^2-2=y \\ y^3-y^2-2=z \\ z^3-z^2-2=x \end{cases}$.

82. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в рациональных числах:

1) $ax^2+bx+c=0$, где $a$, $b$, $c$ нечетные числа

2) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, где $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ нечетные числа.

83. Пусть $c=2^{2^n}+1$ простое число $(n\in N)$.

Решите уравнение $x^p - y^p = c$ в натуральных числах, где $p$ простое.

84. Решите уравнение $(\cos 1 + \sin 2)^2 \cdot \ldots \cdot (\cos n + \sin(n+1))^2 = (1+\sin 1)^{1999}(1+\sin 3)\cdot\ldots\cdot(1+\sin(2n+1))$ в натуральных числах.

85. Найдите все пары рациональных чисел $(x, y)$, для которых числа $x + y + \dfrac{1}{xy}$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$ являются целыми.

86. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $x^2 + xy + y^2 + x + y - 5 = 0$

2) $x^2 - xy + y^2 - x + 3y - 7 = 0$.

87. Решите уравнение $y^z - 1 = (xy)^z - x^{1999}$ в натуральных числах.

88. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = y$

2) $\sqrt[1999]{x + \sqrt[1999]{x + \sqrt[1999]{x}}} = y$.

89. Известно, что целые числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют следующему условию $a(a+1) = bc(bc-1) + b^2$. Докажите, что $|a + bc|$ является полным квадратом.

90. 1) Решите уравнение $\sqrt{2x+\sqrt{3}} + \sqrt{2x-\sqrt{3}} = \sqrt{6y}$ в натуральных числах.

2) Решите уравнение $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ в рациональных числах.

3) Решите уравнение $\sqrt{x+\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}}$ в рациональных числах, где $y$ простое.

91. Докажите, что для любого натурального значения $n$ справедливы следующие соотношения:

1) $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$

2) $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{9n+8}\right]$

3) $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}\right] = \left[\sqrt{16n+23}\right]$.

92. Решите уравнение $x^2+y^2=(xy-1999)^2$ в целых числах.

93. Решите уравнение $\frac{1}{1^4+1^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^4+n^2+1}=\frac{m^2+1}{2m^2+4}$ в натуральных числах.

94. Решите следующие уравнения в рациональных числах:

1) $x^2+y^2-3z^2=0$

2) $x^3+3y^3+9z^3+27xyz=0$

3) $x^4+2y^4-4z^4-8t^4=0$

4) $x^5+2y^5+11z^5+33t^5=0$.

95. Докажите, что уравнение $1999^x x^{1999}+1999^y y^{1999}=$ $=1999^z z^{1999}$ неразрешимо в натуральных числах.

96. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $x^2+y^2=xyz$

2) $x^2+y^2+z^2=2xyzt$

3) $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$.

97. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $x^2+y^2+z^2=x^2y^2t^2$

2) $x^2+y^2+z^2+t^2=x^2y^2z^2$.

98. Найдите все натуральные значения $k$, для которых уравнение $x^2+y^2+z^2=kxyz$ разрешимо в натуральных числах.

99. Решите следующие уравнения в натуральных числах, где $p$ простое, $n>1$:

1) $2^p+3^p=m^n$

2) $3^p+4^p=m^n$.

100. Решите уравнение $x^6+x^3y+y^{1999}=0$ в целых числах.

101. Решите уравнение $x^3+xy+y^3=11$ в целых числах.

102. Решите уравнение $(x^2+y^2)^z-(x^2-y^2)^z=(2xy)^z$ в натуральных числах.

103. Решите уравнение $(x+1)^{y-1}=(x-1)^{y+1}$ в натуральных числах.

104. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $x^y=x+y$

2) $x^y+y^x=xy+x+y$.

105. Решите следующие уравнения в целых числах:

1) $x(x+1)=y^2$

2) $x(x+1)(x+2)=y^2$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3)=y^2$

4) $x(x+1)(x+2)(x+3)=y^3$

5) $x(x+1)=y^n \ (n>1)$

6) $x(x+1)(x+2)=y^n \ (n>1)$

7) $x(x+1)(x+2)(x+3)=y^n \ (n>1)$.

106. Решите уравнение $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{y}{x}}+1}{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{y}{x}}-1}$ в натуральных числах.

107. Решите уравнение $(n!)^{m!}-(m!)^{n!}=28$ в натуральных числах.

108. Решите уравнение $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\left(\sqrt{1999}-\sqrt{1998}\right)^{1997}$ в натуральных числах.

109. Решите уравнение $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{1999}\right)^{1999}$

1) в натуральных числах

2) в целых числах.

110. Решите систему $\begin{cases} x^2y+y^2z+z^2x=23 \\ xy^2+yz^2+zx^2=25 \end{cases}$ в целых числах.

111. Докажите, что для любого натурального значения $n\ (n>1)$ справедливы следующие соотношения:

1) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n^2-1}\right]=\dfrac{(n-1)n(4n+1)}{6}$

2) $\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]=\dfrac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}$.

112. (Эйлер). Докажите, что уравнение $4xy-x-y=z^2$ не имеет решений в натуральных числах.

113. Решите уравнение $(2x)^{2x}-1=y^{z+1}$ в натуральных числах.

114. (Лиувилль). Решите уравнение $(p-1)!+1=p^m$ в натуральных числах, где $p$ простое.

115. Решите уравнение $(x+2)^4-x^4=y^3$ в целых числах.

116. Решите уравнение $x(x+1)=y(y+1)(y^2+1)$ в целых числах.

117. Решите уравнение $y^2=x^3+(x+4)^2$ в целых числах.

118. Решите уравнение $p(p+1)+q(q+1)=n(n+1)$ в натуральных числах, где $p, q$ простые.

119. Решите уравнение $\frac{1}{x_1+\frac{1}{x_2+\ldots\frac{1}{x_n}}}+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\ldots\frac{1}{n}}}=1$ в натуральных числах $(n>1)$.

120. Решите уравнение $2^m\left(2^{2^{n-1}}+1\right)=(m+1)\ldots(m+m)$ в натуральных числах.

121. Решите систему $\begin{cases} x=\left(y^2-1\right)^{x-y} \\ y=\left(x^2-7\right)^{x-y} \end{cases}$ в натуральных числах.

122. Решите уравнение $x(x+1)(x^2+x+2)=2y^2$ в целых числах.

123. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $x!=xy+x+y$

2) $(x+1)!=xy-x+y$.

124. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $1998^x-1997^x=y^2$

2) $1999^x-1998^x=y^2$.

125. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $x^2\left(x^2+1\right)=1999^y-1$

2) $x^4(x+1)=3^y-1$.

126. Решите уравнение $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m=\left(3+5\sqrt{2}\right)^n$ в целых числах.

127. Решите уравнение $1!+2!+\ldots+x!=y^z$ в натуральных числах $(z>1)$.

128. Докажите, что при любом целом значении $n$ корни уравнения $nx^2+(n^2-n)x+1=0$ не являются рациональными числами.

129. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $2^x-3^y=1$

2) $3^x-2^y=1$

3) $5^x-2^y=1$

4) $7^x-2^y=1$.

130. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $5^x-3^y=2$

2) $5^x-3^y=4$

3) $5^x-3^y=8$

4) $5^x-3^y=16$

5) $7^z-3^y=2$

6) $7^z-3^y=4$

7) $10^x-3^y=7$

8) $2^x-3^y=5$.

131. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $2^m-1=n^k(k>1, n>1)$

2) $2^m+1=n^k\ (k>1)$.

132. Решите уравнение $p(2^{p-1}-1)=m^n$ в натуральных числах, где $p$ простое, $n>1$.

133. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $2^x+3^y=z^2$

2) $3^x+5^y=z^2$

3) $2^x+5^y=z^2$.

134. Решите уравнение $2^{x+1}+q^y=z^2$ в натуральных числах, где простое $q=4k-1\ (k\in N)$.

135. Решите уравнение $p^x+q^y=z^2$ в натуральных числах, где простое $p=4k+3$, простое $q=pm-1\ (k,m\in N)$.

136. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $2^x+3^y=5^z$

2) $2^x+3^y=7^z$.

137. Решите уравнение $2^x 3^y = 1 + 5^z$ в натуральных числах.

138. Решите уравнение $5^x + 1 = 2^y + 2^z 5^t$ в натуральных числах.

139. Решите уравнение $2^p + 2^q = pqr$ в натуральных числах, где $p$, $q$ простые.

140. (Эйлер). Решите уравнение $x^y = y^x (x \neq y)$

1) в натуральных числах

2) в рациональных числах.

141. Решите уравнение $x^{x+y} = (x+y)^y$ в натуральных числах.

142. Решите уравнение $x^n + (x+y)^n = (x+2y)^n$ в натуральных числах.

143. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $2^n - 1 = mn$

2) $3^n + 1 = mn$ ($n$ нечетное число).

144. (Ройттер). Если $a$ + 1 не является степенью двойки, то существует бесконечно много натуральных чисел $n$, таких, что $a^n + 1$ делится на $n$ $(a > 1)$.

145. Пусть $a$ + 1 является степенью двойки $(a > 1)$.

1) Найдите все нечетные натуральные числа $n$, такие, что $n$ делит $a^n + 1$.

2) Докажите, что существует бесконечно много $n (n \in N)$, таких, что $n$ делит $a^n + 1$.

146. (Лебег). Решите уравнение $x^2 - y^3 = 7$ в целых числах.

147. Решите уравнение $x^3 - 5y^2 = 13$ в целых числах.

148. Решите уравнение $y^2 = x^3 - 4^z - 1$ в целых числах $(z > 0)$.

149. Решите уравнение $\sqrt[3]{x + \sqrt{8y^2 - 1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{8y^2 - 1}} = z$ в целых числах, где $y$ нечетное число.

150. Решите следующие уравнения в натуральных числах:

1) $x^y - (x+1)^z = 1$

2) $x^y - (x^t + 1)^z = 1$

3) $(x+1)^y - x^z = 1$

4) $(x^t + 1)^y - x^z = 1$.

# Решения

1\. 1) Так как $3=3\cdot1=(-3)(-1)$, то, согласно условию, имеем $\begin{cases} x-1=3;1;-3;-1 \\ y-2=1;3;-1;-3 \end{cases}$, следовательно, получаем следующие решения: $(x,y)=\{(4,3),(2,5),(-2,1),(0,-1)\}$.

Ответ: $\{(4,3),(2,5),(-2,1),(0,-1)\}$.

2) Имеем $x(y-2)+(3(y-2)+6)=5 \Leftrightarrow (x+3)(y-2)=-1$, значит $\begin{cases} x+3=1;-1 \\ y-2=-1;1 \end{cases}$, т.е. $(x,y)=\{(-2,1),(-4,3)\}$.

Ответ: $\{(-2,1),(-4,3)\}$.

3) Имеем $(7x)(7y)-6(7x)-8(7y)+49=0$, $(7x-6)(7y-8)=-1$, следовательно, $\begin{cases} 7x-6=1;-1 \\ 7y-8=-1;1 \end{cases}$, значит $x=y=1$.

Ответ: $\{(1,1)\}$.

4) Имеем $(ax)(ay)+b(ax)+c(ay)+ad=0$,

$(ax+c)(ay+b)=bc-ad$.

Пусть $m$ некоторый делитель числа $bc-ad$, тогда

$$\begin{cases} ax+c=m \\ ay+b=\dfrac{bc-ad}{m} \end{cases}, \quad \begin{cases} x=\dfrac{m-c}{a} \\ y=\dfrac{bc-ad-bm}{am} \end{cases} \qquad (1)$$

Когда $m$ пробегает по всем делителям числа $bc-ad$, получаем решения системы (1), из которых выбираем целочисленные решения.

2\. Имеем $2xy=px+py \Leftrightarrow (2x)(2y)=(2x)p+(2y)p \Leftrightarrow (2x-p)(2y-p)=p^2$. **(1)**

Если $p=2$, то из (1) $(x-1)(y-1)=1$, значит $x-1=1$, $y-1=1$, т.е. $x=y=2$.

Если $p\geq3$, то из (1) $\begin{cases} 2x-p=1;p^2;-1;-p^2;p;-p \\ 2y-p=p^2;1;-p^2;-1;p;-p \end{cases}$ **(2)**

С учетом того, что $x, y$ натуральные числа, из (2) находим следующие решения: $(x,y)=\left\{\left(\frac{p+1}{2},\frac{p^2+p}{2}\right),\left(\frac{p^2+p}{2},\frac{p+1}{2}\right),(p,p)\right\}$.

Ответ: если $p=2$, то $\{(2,2)\}$;

если $p\geq 3$, то $\left\{\left(\frac{p+1}{2},\frac{p^2+p}{2}\right),\left(\frac{p^2+p}{2},\frac{p+1}{2}\right),(p,p)\right\}$.

3. Предположим, существует лишь конечное число простых чисел, а именно $p_1,p_2,...,p_n$. Рассмотрим число $p=p_1p_2...p_n+1$. Очевидно, $p>p_i$. Если $p_i$ делит $p$ для некоторого $i$ $(1\leq i\leq n)$, тогда $p_i$ делит $p-p_1...p_n$, т.е. $p_i$ делит 1, что невозможно. Так как $p>p_i$ и $p$ не делится ни на одно из чисел $p_i$, то $p$ является простым. Получено противоречие, что и требовалось доказать.

4. Предположим, существует лишь конечное число простых чисел $p_1,...,p_n$, для которых уравнение разрешимо в целых числах. Пусть $x=p_1...p_n$, тогда $x^2+x+1=p_1{}^2...p_n{}^2+p_1...p_n+1$ не делится ни на одно из чисел $p_i$, значит существует простое $p$, отличное от чисел $p_i$, которое делит $x^2+x+1$, значит $y=\frac{x^2+x+1}{p}$, следовательно, исходное уравнение разрешимо в целых числах для некоторого простого $p$, отличного от $p_i$. Получено противоречие, что и требовалось доказать.

5. 1) 1-й способ.

Так как простое $p$ больше 3, то $p=3k\pm 1$; $k\in N$, тогда $p^2-1=3(3k^2\pm 2k)$ делится на 3.

Так как $p>3$, то $p$ нечетно, т.е. $p=2n+1$, $n\in N$, тогда $p^2-1=4n(n-1)$ делится на 8, ибо $n(n-1)$ четно. Так как $p^2-1$ делится на 3, на 8, то $p^2-1$ делится на 24. Аналогично $q^2-1$ делится на 24, значит $p^2-q^2=(p^2-1)-(q^2-1)$ делится на 24.

2-й способ.

Так как простые $p, q$ больше 3, то $p=3k\pm 1$, $q=3m\pm 1$, где $m,k\in N$, тогда $p^2-q^2=3(3k^2-3n^2\pm 2k\pm 2n)$ делится на 3.

Так как простые $p$, $q$ больше 3, то $p$, $q$ нечетные, т.е. $p=2l+1$, $q=2n+1$, где $n,l\in N$, тогда $p^2-q^2=4\left(l(l+1)-n(n+1)\right)$ делится на 8, ибо $l(l+1)$, $n(n+1)$ четные числа, следовательно, $p^2-q^2$ делится на $8\cdot 3=24$.

2) Так как $p^2-q^2$ делится на 3 (см. пред. пункт), то $p^4-q^4=\left(p^2-q^2\right)\left(p^2+q^2\right)$ делится на 3.

Так как $p>5$, то $p$ нечетно, значит $p^2=(2m+1)^2=4m(m+1)+1=8n+1$, $p^4=(8n+1)^2=16\cdot$ $\cdot\left(4n^2+n\right)+1=16l+1$, т.е. $p^4-1$ делится на 16. Аналогично $q^4-1$ делится на 16, значит $p^4-q^4=\left(p^4-1\right)-\left(q^4-1\right)$ делится на 16.

Так как $p>5$, то $p=5a\pm 1$ или $p=5a\pm 2$, тогда $p^2=5\left(5a^2\pm 2a\right)+1$ или $p^2=5\left(5a^2\pm 4a+1\right)-1$, т.е. $p^2=5b\pm 1$, значит $p^4=(5b\pm 1)^2=5\left(5b^2\pm 2b\right)+1=5c+1$, т.е. $p^4-1$ делится на 5. Аналогично $q^4-1$ делится на 5, следовательно, $p^4-q^4=\left(p^4-1\right)-\left(q^4-1\right)$ делится на 5. Итак, $p^4-q^4$ делится на $3\cdot 5\cdot 16=240$.

3) Так как $p^2-q^2$ делится на 24, то $p^6-q^6=\left(p^2-q^2\right)\left(p^4+p^2q^2+q^4\right)$ делится на 24.

Так как $p>7$, то $p=7k\pm 1$, или $p=7k\pm 2$, или $p=7k\pm 3$, тогда $p^3=7\left(49k^3\pm 21k^2+3k\right)\pm 1$ или $p^3=7(49k^3\pm 42k^2+$ $+12k\pm 1)\pm 1$ или $p^3=7\left(49k^3\pm 189k^2+27k\pm 4\right)\mp 1$, т.е. $p^3=7n\pm 1$, $p^6=(7n\pm 1)^2=7\left(7n^2\pm 2n\right)+1$, следовательно, $p^6-1$ делится на 7, значит $p^6-q^6=\left(p^6-1\right)-\left(q^6-1\right)$ делится на 7. Итак, $p^6-q^6$ делится на $24\cdot 7=168$.

6. 1) Очевидно, $p\neq 2$. $p=3$ удовлетворяет условию.

Предположим, $p>3$, тогда $p=3k\pm 1$, $k\in N$.

Если $p=3k+1$, то $p+14$ делится на 3, если $p=3k-1$, то $p+10$ делится на 3, что невозможно.

Ответ: $\{3\}$.

2) Очевидно, $p\neq 2$. $p=3$ удовлетворяет условию.

Предположим, $p>3$, тогда $p=3k\pm1$, $8p^2+1=8(3k\pm1)^2+1=$ $=3(24k^2\pm16k+3)$ делится на 3, что невозможно.

Ответ: $\{3\}$.

3) Очевидно, $p\neq2$, $p\neq3$.

Предположим, $p>3$. Заметим, что всякое натуральное число можно представить в виде $6k$, либо $6k\pm1$, либо $6k\pm2$, либо $6k+3$, однако $6k$ делится на 6, $6k\pm2$ делится на 2, $6k+3$ делится на 3, следовательно, простое $p=6k\pm1$. Если $p=6k+1$, то $p+1$ делится на 2, если $p=6k-1$, то $p+10$ делится на 3, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

4) Очевидно, $p\neq2$, $p\neq3$. $p=5$ удовлетворяет условию.

Предположим, $p>5$, тогда $p=5k\pm1$ или $p=5k\pm2$.

Если $p=5k\pm1$, то $4p^2+1=5(20k^2\pm8k+1)$ делится на 5, если $p=5k\pm2$, то $6p^2+1=5(30k^2\pm24k+5)$ делится на 5, что невозможно.

Ответ: $\{5\}$.

5) Очевидно, $p\neq2$, $p\neq3$. $p=5$ удовлетворяет условию.

Предположим, $p>5$, тогда $p=5k\pm1$ или $p=5k\pm2$.

Если $p=5k\pm1$, то $p^2-6=5(5k^2\pm2k-1)$ делится на 5, если $p=5k\pm2$, то $p^2+6=5(5k^2\pm4k+2)$ делится на 5, что невозможно.

Ответ: $\{5\}$.

6) Очевидно, $p\neq2$, $p\neq3$. $p=5$ удовлетворяет условию.

Предположим, $p>5$, тогда $p=5k\pm1$ или $p=5k\pm2$, тогда $p^2=5(5k^2\pm2k)+1$ или $p^2=5(5k^2\pm4k+1)-1$, т.е. $p^2=5n\pm1$, значит $p^4=5(5n^2\pm2n)+1=5m+1$, т.е. $p^4-6=5(m-1)$ делится на 5, что невозможно.

Ответ: $\{5\}$.

7) Очевидно, $p\neq2$, $p\neq3$, $p\neq5$. $p=7$ удовлетворяет условию.

Предположим, $p>7$, тогда $p=7k\pm1$ или $p=7k\pm2$ или $p=7k\pm3$.

Если $p=7k+1$ или $p=7k+2$ или $p=7k-3$, то $p^3+6$ делится на 7; если $p=7k-1$ или $p=7k-2$ или $p=7k+3$, то $p^3-6$ делится на 7, что невозможно.

Ответ: $\{7\}$.

8) Очевидно, $p\neq2$, $p\neq5$. $p=3$, $p=7$ удовлетворяет условию.

Предположим, $p>7$, тогда $p=7k\pm1$ или $p=7k\pm2$ или $p=7k\pm3$.

Если $p=7k\pm1$, то $3p^2+4$ делится на 7; если $p=7k\pm2$, то $2p^2-1$ делится на 7; если $p=7k\pm3$, то $p^2-2$ делится на 7, что невозможно.

Ответ: $\{3;7\}$.

9) $p=2$ удовлетворяет условию.

Предположим, $p>2$, тогда $2^p\pm1>3$, причем $(2^p+1)(2^p-1)=4^p-1=(3+1)^p-1=(3n+1)-1=3n$, значит $2^p+1$ или $2^p-1$ делится на 3, что невозможно.

Ответ: $\{2\}$.

10) Пусть $r=p^q+q^p$.

Если $p>2$, $q>2$, то $p,q$ нечетные, значит $r$ четно, что невозможно.

Пусть для определенности $q=2$, тогда $r=2^p+p^2$.

Если $p=2$, то $r=8$, что невозможно.

Если $p=3$, то $r=17$ простое. Предположим, $p>3$, тогда $p=3k\pm1$, следовательно, $p^2=3(3k^2\pm2k)+1=3m+1$. Так как $p>3$, то $p$ нечетно, т.е. $p=2l+1$, тогда $2^p=2^{2l+1}=2\cdot4^l=2(3+1)^l=2(3n+1)$, значит $r=(3m+1)+$ $+2(3n+1)=3(m+2n+1)$ делится на 3, что невозможно.

Итак, $p=3$, $q=2$. Аналогично $q=3$, $p=2$.

Ответ: $\{(2,3),(3,2)\}$.

7. Пусть $m=\overline{abc}$, $n=\overline{bca}$, $k=\overline{cab}$.

Имеем $10m-n=\overline{abc0}-\overline{bca}=\left(1000a+\overline{bc0}\right)-\left(\overline{bc0}+a\right)=999a=$ $=27\cdot 37a$, т.е. $n=10m-27\cdot 37a$, причем, согласно условию, $m$ делится на 37, значит $n$ делится на 37.

Так как $m+n+k=(100a+10b+c)+(100b+10c+a)+$ $+(100c+10a+b)=3\cdot 37(a+b+c)$ и числа $m, n$ делятся на 37, то $k$ делится на 37.

8. Предположим, $n^{1996}$ оканчивается числом 1996, тогда $n^{1996}=10000m+1996$, где $m\in N$, причем $n$ четно, значит $n^{1996}$ делится на $2^{1996}$, следовательно, $2^{1996}$ делит $10000m+1996$, однако, $10000m+1996=8(1250m+249)+4$ не делится на 8. Получено противоречие. Таким образом, натуральных чисел, удовлетворяющих исходному условию, не существует.

Ответ: нет.

9. Пусть $N=\overline{a_1...a_n}$, тогда $10^{n-1}\le N$.

Имеем $N^{1999}=a_1...a_n<10^n=10\cdot 10^{n-1}\le 10N$, следовательно, $N^{1998}\le 10<2^{1998}$, т.е. $N<2$, значит $N=1$.

Ответ: $\{1\}$.

10. Пусть $N=\overline{a_1...a_n}$, тогда $10^{n-1}\le N$.

Имеем $10^{n-1}\le N=a_1{}^2+...+a_n{}^2\le 9n^2<100n$, т.е. $10^{n-3}<n$. Если $n\ge 4$, то $10^{n-3}>n$, значит $n<4$, т.е. $n\le 3$, следовательно, $N=100x+10y+z$. Имеем $100x+10y+z=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow$ $x(100-x)+y(10-y)=z(z-1)$. Если $x\ne 0$, то $x(100-x)\ge 100-x>90$, значит $x(100-x)+y(10-y)>90+0=90$, однако $z(z-1)\le 9\cdot 8=72$. Получено противоречие. Итак, $x=0$, тогда $N=10y+z$, $10y+z=y^2+z^2$, $y(10-y)=z(z-1)$. Если $y=1;2;...;9$, то последнее уравнение решений не имеет. Итак, $y=0$, тогда $N=z$, $z=z^2$, т.е. $N=z=1$.

Ответ: $\{1\}$.

11. 1) Для любых положительных чисел $a, b, c$ справедливо неравенство $(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow$

$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$. Пусть $a^3=m$, $b^3=n$, $c^3=k$, тогда $m+n+k \geq 3\sqrt[3]{mnk}$, где $m, n, k>0$. Имеем $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq$

$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}}=3>2{,}345$. Получено противоречие.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2) Имеем $x^2z+y^2x+z^2y=1999xyz$, $\frac{y^2x}{z}=1999xy-x^2-zy$, значит z делит $xy^2$, однако $(z,x)=1$, $(z,y)=1$, следовательно, $z=\pm1$. Аналогично $x=\pm1$, $y=\pm1$, тогда $\frac{x}{y}=\pm1$, $\frac{y}{z}=\pm1$, $\frac{z}{x}=\pm1$,

значит $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \leq 3<1999$. Получено противоречие.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

12. 1) $x_1=\ldots=x_{1997}=1$, $x_{1998}=2$, $x_{1999}=1999$

2) $x_1=\ldots=x_{1998}=2$, $x_{1999}=1997$, $y=1999$

3) $x=1997^{999}29$, $y=1997^{999}34$.

13. 1-й способ.

Заметим, что пара чисел $(3,2)$ удовлетворяет условию, причем из тождества $(3y+4x)^2-2(2y+3x)^2=y^2-2x^2$ следует, что если пара чисел $(x,y)$ является решением, то пара чисел $(3y+4x, 2y+3x)$ также является решением исходного уравнения.

2-й способ.

Заметим, что пара чисел $(3,2)$ удовлетворяет условию. Перепишем уравнение в виде $\left(y-\sqrt{2}x\right)\left(y+\sqrt{2}x\right)=1$ и возведем обе части последнего равенства в квадрат, получим $\left(y^2+2x^2-2xy\sqrt{2}\right)\left(y^2+2x^2+2xy\sqrt{2}\right)=1$, откуда $\left(y^2+2x^2\right)^2-$ $-2(2xy)^2=1$. Итак, если пара $(x, y)$ является решением исходного уравнения, то пара чисел $\left(2xy, y^2+2x^2\right)$ также является решением.

2) Имеем $y=\frac{1-zx}{z+x}=\frac{\left(z^2+1\right)-\left(zx+z^2\right)}{z+x}=\frac{z^2+1}{z+x}-z$. Пусть $z^2+1=z+x$, тогда $y=1-z$.

Имеем $x = z^2 - z + 1$, $y = 1 - z$.

Ответ: $\{(z^2 - z + 1; 1 - z; z): z \in Z\}$.

14. 1) Заметим, что $2^m + 2^m = 2^{m+1}$.

Пусть $x = 2^{\frac{m}{2}}$, $y = 2^{\frac{m}{3}}$, $z = 2^{\frac{m+1}{5}}$, тогда $x^2 + y^3 = z^5$. Пусть $m = 6k$, тогда $x = 2^{3k}$, $y = 2^{2k}$, $z = 2^{\frac{6k+1}{5}}$. Пусть $k = 5n + 4$, тогда $x = 8^{5n+4}$, $y = 4^{5n+4}$, $z = 2^{6n+5}$, где $n \in N$.

2) Заметим, что $3^m + 3^m + 3^m = 3^{m+1}$.

Пусть $x = 3^{\frac{m}{2}}$, $y = 3^{\frac{m}{3}}$, $z = 3^{\frac{m}{5}}$, $t = 3^{\frac{m+1}{7}}$, тогда $x^2 + y^3 + z^5 = t^7$.

Пусть $m = 30k$, тогда $x = 3^{15k}$, $y = 3^{10k}$, $z = 3^{6k}$, $t = 3^{\frac{30k+1}{7}}$. Пусть $k = 7n + 10$, тогда $x = 3^{150+105n}$, $y = 3^{100+70n}$, $z = 3^{60+42n}$, $t = 3^{43+30n}$, где $n \in N$.

15. Пусть $x = 1$, тогда $y^2z^2 + y^2 + z^2 = t^2 \Leftrightarrow (y^2+1)(z^2+1) = t^2 + 1 \Leftrightarrow (yz+1)^2 + (y-z)^2 = t^2 + 1$.

Пусть $yz + 1 = t$, $y - z = 1$, тогда $y = z + 1$, $t = z(z+1) + 1 = z^2 + z + 1$.

Итак, $x = 1$, $y = z + 1$, $z = z$, $t = z^2 + z + 1$, где $z \in N$.

16. 1) Если $n = 2k - 1$, где $k \in N$, то решением является, например, пара чисел $(-k, 0)$. Если $n = 2k$, где $k \in N$, то решением является, например, пара чисел $(-k, k)$.

2) Имеем $x^2 - n = (z - y)(z + y)$.

Пусть $z - y = 1$, $z + y = a$, где $a \in Z$, тогда $x^2 - n = a$. Имеем $z = \frac{a+1}{2}$, $y = \frac{a-1}{2}$.

Пусть $a = 2b + 1$, где $b \in Z$, тогда

$$z = b + 1,\ y = b,\ x^2 - n - 1 = 2b. \tag{1}$$

Если $n$ четное, т.е. $n = 2k$, то из (1) заключаем, что $x$ нечетное, т.е. $x = 2l + 1$, где $k, l \in Z$, тогда $(2l+1)^2 - 2k - 1 = 2b \Leftrightarrow b = 2l^2 + l - k$, значит $x = 2l + 1$, $y = 2l^2 + l - k$, $z = 2l^2 + l - k + 1$, причем справедливо следующее соотношение: $2k = (2l+1)^2 + (2l^2 + l - k)^2 - (2l^2 + l - k + 1)^2$.

Если $n$ нечетное, т.е. $n = 2k-1$, то из (1) заключаем, что $x$ четное число, т.е. $x = 2l$, где $k, l \in Z$, тогда $(2l)^2 - (2k-1) - 1 = 2b \Leftrightarrow b = 2l^2 - k$, значит $x = 2l$, $y = 2l^2 - k$, $z = 2l^2 - k + 1$, причем справедливо следующее тождество: $2k - 1 = (2l)^2 + (2l^2 - k)^2 - (2l^2 - k + 1)^2$.

17. Пусть $A = n^{998}$, $B = 665m^{665} + 665$, тогда исходное уравнение перепишем в виде $A^2 = 3B - 1$. Покажем, что никакой полный квадрат не дает в остатке (-1) при делении на 3. Действительно, если $A = 3k$ ($k \in Z$), то $A^2 = 9k^2 = 3(3k^2) + 0$. Если $A = 3k \pm 1$, то $A^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$, что и требовалось доказать. Таким образом, исходное уравнение неразрешимо.

18. Если $x = 2m$, где $m \in Z$, то $x^8 = 32(8m^8)$.

Если $x = 2m+1$, где $m \in Z$, то $x^2 = 4m(m+1) + 1 = 8n + 1$, $x^4 = 16n(4n+1) + 1 = 16l + 1$, $x^8 = 32(8l^2 + l) + 1$.

Итак, $x^8$ при делении на 32 дает в остатке либо 0, либо 1, следовательно, $x_1^8 + \ldots + x_8^8$ при делении на 32 дает в остатке не больше 8, однако $1999 = 32 \cdot 62 + 15$. Получено противоречие.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

19. Так как $2p+1$ нечетно, то $q$ нечетно, т.е. $q = 2n+1$, где $n \in N$.

Имеем $2p + 1 = (2n+1)^3 \Leftrightarrow p = n(4n^2 + 6n + 3)$ и так как $p$ простое, то $n = 1$, тогда $p = 13$, $q = 3$.

Ответ: $\{(13, 3)\}$.

20. Имеем $p(5q - x^2) = qy^2$.

Так как $p$ делит $qy^2$ и $p$, $q$ различные простые числа, то $p$ делит $y^2$, значит $p$ делит $y$,т.е. $y = ap$, где $a \in N$. Аналогично $q$ делит $x$, т.е. $x = bq$, где $b \in N$, тогда $p(qb)^2 + q(ap)^2 = 5pq \Leftrightarrow qb^2 + a^2 p = 5$. Имеем $5 = a^2 p + b^2 q > 2a^2 + 2b^2$, т.е. $a^2 + b^2 < 2{,}5$, причем $a, b \in N$, значит $a = b = 1$, тогда $p + q = 5$, т.е. $p = 2$, $q = 3$

или $p=3$, $q=2$.

Ответ: $\{(x, y, p, q): (2, 3, 3, 2), (3, 2, 2, 3)\}$.

21. 1-й способ.

Предположим, $x^2+y=m^2$, $y^2+x=n^2$, где $m, n \in N$.

Пусть для определенности $y \le x$, тогда $x^2 < x^2+y \le x^2+x < (x+1)^2$, т.е. $x^2 < m^2 < (x+1)^2$, $x < m < x+1$, что невозможно.

2-й способ.

Предположим, $x^2+y=m^2$, $y^2+x=n^2$, где $m, n \in N$, тогда $x^2 < m^2$, $y^2 < n^2$, т.е. $x < m$, $y < n$, значит $m=a+x$, $n=b+y$, где $a, b \in N$, тогда $\begin{cases} x^2+y=(z+x)^2 \\ y^2+x=(b+y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a^2+2ax \\ x=b^2+2by \end{cases} \Rightarrow$ $x=b^2+2by=b^2+2b(a^2+2ax)>x$, что невозможно. Получено противоречие, что и требовалось доказать.

22. Очевидно, $n \ne 1; 2; 3; 4; 5$. $n=6$ удовлетворяет условию.

Покажем, что $n! > 20n^2$ для любого $n \in N$, $n \ge 7$. Очевидно $7! > 20 \cdot 7^2$.

Предположим, $k! > 20k^2$ и докажем, что $(k+1)! > 20(k+1)^2$.

Действительно, $(k+1)! = k!(k+1) > (20k^2)(k+1) > (20(k+1)) \cdot$ $\cdot (k+1) = 20(k+1)^2$, что и требовалось доказать.

Ответ: $\{6\}$.

23. 1-й способ.

Если $p=2$, или $p=3$, или $p=5$, то $r=2$, или $r=3$, или $r=5$ соответственно. Пусть $p>5$.

Имеем $p=30d+r$, где $d, r \in Z$, $d \ge 0$, $0 \le r < 30$.

Так как $p$ простое, то $r \ne 0$, значит $1 \le r \le 29$. Предположим, $r$ составное. Заметим, что всякое составное число от 1 до 29 делится на 2, или на 3, или на 5, тогда $p=30d+r=2 \cdot 3 \cdot 5d+r$ также делится на 2, или на 3, или на 5 соответственно, что невозможно, ибо $p$ простое. Итак, $r$ простое число.

2-й способ.

Аналогично предыдущему способу можно считать, что $p>5$,

$p=30d+r$, где $1\le r\le 29$. Предположим, $r$ составное. Пусть $q$ наименьший простой делитель числа $r$, тогда $r=qm$, где $q\le m$, значит $29\ge r=qm\ge q^2$, т.е. $q^2\le 29$, $q\le 5$,следовательно, $q=2$, или $q=3$, или $q=5$, тогда $p=30d+r=2\cdot 3\cdot 5+qm$ делится на 2, или на 3, или на 5, что невозможно.

Итак, r простое число.

2) Если $r=2;3;4;5;6;7$, то число $p=210d+r$ является составным. Очевидно, $r\ne 1$ (так как $r$ составное).

Пусть $r>7$. Имеем $p=210d+r$, где $0<r<210$ ($r\ne 0$, так как $p$ простое). Пусть $q$ наименьший простой делитель числа $r$, тогда $r=qm$, где $m\ge q$. Имеем $210>r=qm\ge q^2$, значит $q\le 13$, и так как $r>7$, то $q>7$, следовательно, $q=11$ или $q=13$. Предположим, $q=11$.

Согласно условию $r=a^2+b^2$, где $a,b\in N$, тогда 11 делит $a^2+b^2$. Если $a$ делится на 11, то $b^2=\left(a^2+b^2\right)-a^2$ делится на 11, значит $b$ делится на 11, тогда $r=a^2+b^2=$ $=(11c)^2+(11h)^2\ge 121+121=242$, что невозможно, ибо $r<210$.

Итак, $a$ не делится на 11. Аналогично $b$ не делится на 11. Заметим, что если $m$ не делится на 11, то $m^2$ при делении на 11 дает остатки 1, 3, 4, 5, 9, значит $a^2+b^2$ не делится на 11. Получено противоречие, следовательно, $q\ne 11$. Итак, $q=13$, тогда $m<\dfrac{210}{q}<17$, т.е. $m\le 16$, причем $m\ge q\ge 13$.

Так как $r=qm$ и $q$ наименьший простой делитель числа $r$, то наименьший простой делитель числа $m$ также не меньше, чем $q=13$, значит $m\ne 14=2\cdot 7$, $m\ne 15=3\cdot 5$, $m\ne 16=2\cdot 8$. Итак, $m=13$, следовательно, $r=qm=169=12^2+5^2$.

Ответ: $\{169\}$.

24. 1) Имеем $\overline{xx00}+\overline{yy}=z^2 \Leftrightarrow 1100x+11y=z^2 \Leftrightarrow$ $11(100x+y)=z^2$, значит $z=11t$, где $t\in N$, тогда $100x+y=11t^2 \Leftrightarrow x+y=11\left(t^2-9x\right)$.

Так как $x+y$ делится на 11 и $x\le 9$, $y\le 9$, то $x+y=11$, значит

$t^2=9x+1$, причем $1\le x\le 9$, следовательно, $x=7$, $t=8$, $y=11-x=4$, $z=11t=88$.

Ответ: $\{(7;4;88)\}$.

2) Имеем $1100x+11y=(11x)^2+(11y)^2 \Leftrightarrow 99x+(x+y)=$ $=11(x^2+y^2)$.

Так как $x+y$ делится на 11, $x\le 9$, $y\le 9$, то $x+y=11$,тогда $100x+(11-x)=11(x^2+(11-x)^2)$, значит $x=8$, $y=11-x=3$.

Ответ: $\{(8,3)\}$.

25. Пусть $N=2^k(2l-1)$, где $k,l\in N$, пусть $N=n+(n+1)+\ldots+(n+m)$, где $n,m\in N$, тогда

$$N=\frac{n+(n+m)}{2}(m+1), \text{ значит } 2^{k+1}(2l-1)=(2n+m)(m+1). \qquad (1)$$

Рассмотрим случай, когда $N$ не является степенью двойки, т.е. $l\ge 2$.

Если $2^k+1>l$, тогда пусть $\begin{cases}2n+m=2^{k+1}\\ m+1=2l-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=2l-2\\ n=2^k+1-l\end{cases}$, получаем $N=(2^k+1-l)+((2^k+1-l)+1)+\ldots+((2^k+1-l)+(2l-2))$.

Если $2^k+1\le l$, т.е. $2^k<l$, то пусть $\begin{cases}2n+m=2l-1\\ m+1=2^{k+1}\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}m=2^{k+1}-1\\ n=l-2^k\end{cases}$, получаем $N=(l-2^k)+((l-2^k)+1)+\ldots+$ $+((l-2^k)+2^{k+1}-1)$.

Покажем, что если $N=2^m$, т.е. $l=1$, тогда $N$ непредставимо в виде суммы последовательных натуральных чисел. Действительно, из (1) имеем $(2n+m)(m+1)=2^{k+1}$. **(2)**

Если $m$ четно, то $m+1$ нечетно, $m+1$ делит $2^{k+1}$, что невозможно. Если $m$ нечетно, то $2n+m$ нечетно и $2n+m$ делит $2^{k+1}$, что невозможно. Что и требовалось доказать.

26. 1-й способ.

Заметим, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1, квадрат четного числа – дает в остатке 0 или 4. В частности, при делении на 4 квадрат целого числа дает в остатке либо 0 либо 1. Действительно, $(2l+1)^2=4l(l+1)+1=8k+1$; $(4l)^2=8(2l^2)$, $(4l+2)^2=8(2l^2+2l)+4$. В частности, $(2l+1)^2=4(l^2+l)+1$, $(2l)^2=4l^2$.

Предположим, исходная система имеет решение в натуральных числах, тогда можно считать, что $(x,y)=1$, так как в случае $(x,y)=d>1$ мы разделим обе части равенств на $d^2$. Итак, $(x,y)=1$, значит одно из чисел $x$, $y$ является нечетным. Предположим, $x$, $y$ нечетные числа, тогда $z^2=x^2+2y^2=(4m+1)+2(4n+1)=4(m+2n)+3$, т.е. $z^2$ при делении на 4 дает в остатке 3, что невозможно. Итак, $x$, $y$ различной четности. Пусть для определенности $x$ нечетно, $y$ четно, тогда $t^2=2x^2+y^2=2(4m+1)+4n=4(2m+n)+2$, т.е. $t^2$ дает в остатке 2 при делении на 4, что невозможно. Таким образом, исходная система неразрешима.

2-й способ.

Сложим уравнения системы, получим $3(x^2+y^2)=z^2+t^2$. **(1)**

Выберем решение уравнения (1) с наименьшим возможным значением $x$.

Заметим, что если $n$ не делится на 3, то $n^2$ дает в остатке 1 при делении на 3. Действительно, $(3k\pm1)^2=3(3k^2\pm2k)+1$.

Если $z$, $t$ одновременно не делятся на 3, то $z^2+t^2$ при делении на 3 дает в остатке $0+1=1$, или $1+0=1$, или $1+1=2$, что противоречит (1), ибо $z^2+t^2$ делится на 3.

Итак, числа $z,t$ делятся на 3, т.е. $z=3c$, $t=3d$, тогда $3(x^2+y^2)=(3c)^2+(3d)^2$, $x^2+y^2=3(c^2+d^2)$. Аналогично $x,y$ делятся на 3, т.е. $x=3a$, $y=3b$, где $a,b,c,\ d\in N$, тогда $(3a)^2+(3b)^2=3(c^2+d^2)$, $3(a^2+b^2)=c^2+d^2$.

Итак, $(a,b,c,d)$ удовлетворяет (1), причем $x=3a>a$, что противоречит определению $x$. Итак, исходная система неразрешима.

2) 1-й способ.

Предположим, исходная система имеет решение в натуральных числах, тогда можно считать, что $(x,y)=1$, так как в случае $(x,y)=d>1$, мы разделим обе части равенств на $d^2$.

Итак, $(x,y)=1$, значит одно из чисел $x, y$ является нечетным. Предположим, $x, y$ нечетные числа, тогда $z^2=x^2+5y^2=(8m+1)+5(8n+1)=8(m+5n)+6$, т.е. $z^2$ при делении на 8 дает в остатке 6, что невозможно (см. № 26 (1–й способ)).

Итак, $x, y$ различной четности.

Пусть для определенности $x$ нечетно, $y$ четно. Если $y$ делится на 4, то $t^2=5x^2+y^2=5(8m+1)+(4n)^2=8(5m+2n^2)+5$, что невозможно. Если $y$ делится на 4, то $z^2=x^2+5y^2=(8m+1)+5(4n+2)^2=8(m+10n^2+10n+2)+5$, что невозможно.

Итак, исходная система неразрешима.

2–й способ.

Сложив уравнения системы, получим $6(x^2+y^2)=z^2+t^2$. (2)

Выберем решения уравнения (2) с наименьшим возможным значением $x$.

Из (2) заключаем, 3 делит $z^2+t^2$, значит $z, t$ делятся на 3 (см. № 26 (2–й способ)), т.е. $z=3c$, $t=3d$, тогда $2(x^2+y^2)=3(c^2+d^2)$, значит $x^2+y^2$ делится на 3, тогда $x, y$ делятся на 3, т.е. $x=3a$, $y=3b$, где $a, b, c, d \in N$, следовательно, $6(a^2+b^2)=c^2+d^2$.

Итак, $(a, b, c, d)$ удовлетворяет (2), причем $x=3a>a$, что противоречит определению $x$.

Итак, исходная система неразрешима.

27. 1) Имеем $(x-y)(x+y)=7=1\cdot 7$, причем $x-y<x+y$, значит $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.

Ответ: $\{(4,3)\}$.

2) Имеем $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=19=1\cdot 19$, причем $x-2y<x<x^2+2xy+4y^2$, значит $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+2xy+4y^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=2y+1 \\ (2y+1)^2+2y(2y+1)+4y^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ y=1; y=-1{,}5 \end{cases}$, причем $y \in N$, значит $y=1$, $x=3$.

Ответ: $\{(3,1)\}$.

3) Лемма: если $m \geq 2$, $x \geq 0$, то $(x+1)^m - x^m \geq 1 + mx$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^m - x^m - 1 - mx$. $f'(x) = m\left((1+x)^{m-1} - 1 - x^{m-1}\right) \geq 0$, значит $f(x)$ возрастает на интервале $[0, +\infty)$, следовательно, $f(x) \geq f(0) = 0$. Лемма доказана.

Из условия заключаем, $x > y$, значит $x \geq y+1$, тогда $5 = x^m - y^m \geq (y+1)^m - y^m \geq 1 + my \geq 1 + 2y$, т.е. $5 \geq 1 + 2y$, значит $y = 1$ или $y = 2$.

Если $y = 1$, то $x^m = 5$, что невозможно, ибо $m \geq 2$. Если $y = 2$, то $5 \geq 1 + my = 1 + 2m$, т.е. $5 \geq 1 + 2m$, значит $m = 2$. Имеем $x^2 - 2^2 = 5$, $x = 3$.

Ответ: $\{(x, y, m) = (3, 2, 2)\}$.

28. Имеем

$$x^6 - \left(x^4 - y\right)^2 = 1999 \Leftrightarrow \quad \left(x^3 - \left(x^4 - y\right)\right)\left(x^3 + \left(x^4 - y\right)\right) = 1999 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^3 - \left(x^4 - y\right) = 1;1999;-1;-1999 \\ x^3 + \left(x^4 - y\right) = 1999;1;-1999;-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 1000;1000;-1000;-1000 \\ x^4 - y = 999;-999;-999;999 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(x, y) = \{(10, 9001), (10, 10999), (-10, 10999), (-10, 9001)\}$.

Ответ: $\{(10, 9001), (10, 10999), (-10, 10999), (-10, 9001)\}$.

29. Пусть $x^5 = a$, $y^4 = b$, тогда $a^2 + 5a - b^2 - 4b = 1 \Leftrightarrow$ $4a^2 + 20a - \left(4b^2 + 16b\right) = 4 \Leftrightarrow$ $\left((2a+5)^2 - 25\right) - \left((2b+4)^2 - 16\right) = 4 \Leftrightarrow$ $(2a+5)^2 - (2b+4)^2 = 13 \Leftrightarrow$ $(2a + 2b + 9)(2a - 2b + 1) = 13 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2a + 2b + 9 = 1;-1;13;-13 \\ 2a - 2b + 1 = 13,-13;1;-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1;1;-6;-6 \\ b = 1;-5;1;-5 \end{cases}$, причем $a = x^5$, $b = y^4$, где $x, y \in Z$, значит $x^5 = 1$, $y^4 = 1$, т.е. $x = 1$, $y = \pm 1$.

Ответ: $\{(1, \pm 1)\}$.

30. 1) $n^4 + 4 = \left(n^4 + 4n^2 + 4\right) - 4n^2 = \left(n^2 + 2\right)^2 - (2n)^2 =$
$= \left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right)$.

2) Если $n = 2m$, то $n^4 + 4^n k^4 = 16\left(m^4 + 16^{m-1} k^4\right)$. Если $n = 2m+1$, то $n^4 + 4^n k^4 = n^4 + 4\left(2^m k\right)^4 = (n^4 + 4n^2\left(2^m k\right)^2 +$

$+4\left(2^m k\right)^4)-4n^2\left(2^m k\right)^2=\left(n^2+2^{2m+1}k^2\right)-\left(2^{m+1}nk\right)^2=(n^2-2^{m+1}nk+$ $+2^{2m+1}k^2)\left(n^2+2^{m+1}nk+2^{2m+1}k^2\right)$, причем $n^2+2^{m+1}nk+2^{2m+1}k^2>$ $>n^2-2^{m+1}nk+2^{2m+1}k^2=\left(n-2^m k\right)^2+2^{2m}k^2>1$.

31. Пусть $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}=x$, тогда $\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{x}$, значит $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \quad x^2-\sqrt{6}x+1=0$, $\quad x=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$, тогда $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{n}}=\left(\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\pm\sqrt{3}$, значит $\dfrac{2}{n}=\pm1 \Leftrightarrow \ n=\pm2$, однако $n\in N$, следовательно, $n=2$.

Ответ: $\{2\}$.

32. Так как $x+y+z$ делится на $x$, то $y+z$ делится на $x$, т.е. $y+z=ax$, где $a\in N$. Аналогично $z+x=by$, $x+y=cz$, где $b,c\in N$.

Имеем $\begin{cases} x=by-z \\ (by-z)+y=cz \\ y+z=a(by-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=by-z \\ (b+1)y=(c+1)z \\ (ab-1)y=(a+1)z \end{cases}$ **(1)**

$\Rightarrow \dfrac{ab-1}{b+1}=\dfrac{a+1}{c+1} \Leftrightarrow \ abc=a+b+c+2$. **(2)**

Пусть для определенности $a\le b\le c$. Если $c=1$, тогда $1\ge b\ge a$, значит $a=b=1$, что противоречит (2).

Если $b=1$, то $1\ge a$, значит $a=1$, тогда из (2) $c=c+4$, что невозможно. Итак, $b\ge2$, $c\ge2$. Из (2) имеем $a=\dfrac{b+c+2}{bc-1}$, значит $b+c+2\ge bc-1 \Leftrightarrow (b-1)(c-1)\le4$, следовательно,

$$(b,c)=\{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3)\},$$

ибо $b\ge c$, причем $a=\dfrac{b+c+2}{bc-1}\in N$. Если $b=c=2$, тогда $a=2$, следовательно, из (1) $\begin{cases} x=2y-z \\ 3y=3z \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=y=z$, т.е. $x:y:z=1:1:1$.

Если $b=2$, $c=3$ или $b=2$, $c=4$, то $a$ не является целым.

Если $b=2$, $c=5$, то $a=1$, значит из (1) $\begin{cases} x=2y-z \\ 3y=6z \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=3z \\ y=2z \end{cases}$, т.е. $x:y:z=3:2:1$.

Если $b=c=3$, то $a=1$, значит из (1) $\begin{cases} x=3y-z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=z \end{cases}$, т.е. $x:y:z=2:1:1$.

Ответ:
$\{x:y:z\}=\{1:1:1, 3:2:1, 3:1:2, 1:3:2, 1:2:3, 2:1:3, 2:3:1, 2:1:1, 1:2:1, 1:1:2\}$.

33. Очевидно, $xyz \neq 0$.

Имеем $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=3xyz$, значит $xyz>0$. Так как для любых положительных чисел $m, n, k$ справедливо неравенство $m+n+k \geq 3\sqrt[3]{mnk}$ (см. № 11), значит $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq$ $\geq 3\sqrt[3]{(x^2y^2)(y^2z^2)(z^2x^2)}=3(xyz)^{\frac{4}{3}}$, следовательно, $3xyz \geq 3(xyz)^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow$ $3xyz\left(\sqrt[3]{xyz}-1\right) \leq 0$, причем $xyz>0$, значит $\sqrt[3]{xyz}-1 \leq 0 \Leftrightarrow$ $xyz \leq 1$, тогда $xyz=1$, следовательно, $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $z=\pm 1$. Таким образом, находим решения
$(x, y, z)=\{(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)\}$.

Ответ: $\{(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)\}$.

34. 1) Предположим, дробь сократима, тогда $\begin{cases} an+b=mk \\ cn+d=ml \end{cases}$, где $m,k,l \in Z$, причем $m \neq \pm 1$. Имеем $1=ad-bc=a(ml-cn)-$ $-(mk-an)c=m(al-kc)$, значит $m$ делит 1, что невозможно.

2) Заметим, $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2$, тогда $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1+(ac+bd)^2$, значит всякий делитель чисел $ac+bd$, $a^2+b^2$ делит 1, следовательно, исходная дробь несократима.

35. 1) Имеем $(x^3-3x+2)+(y^3-3y+2)=0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)^2(x+2)+(y-1)^2(y+2)=0. \quad \textbf{(1)}$$

Если $x>1$ или $y>1$, то (1) не выполняется, значит $x=y=1$.

Ответ: $\{(1,1)\}$.

2) Имеем $(x+y)(x^2-xy+y^2)+4=3(x+y)$, значит $x+y$ делит 4, тогда $x+y=\pm1;\pm2;\pm4$, причем $(x+y)^3-3xy(x+y)+4=3(x+y)$,

значит $xy=\dfrac{(x+y)^3+4-3(x+y)}{3(x+y)}$. **(2)**

Если $x+y=1$, то $xy=\dfrac{2}{3}$, что невозможно.

Если $x+y=-1$, то $xy=-2$, значит $x=-2$, $y=1$ или $x=1$, $y=-2$.

Если $x+y=2$, то $xy=1$, значит $x=y=1$.

Если $x+y=-2$, то $xy=-\dfrac{1}{3}$, что невозможно.

Если $x+y=4$, то $xy=\dfrac{14}{3}$, что невозможно.

Если $x+y=-4$, то $xy=4$, значит $x=y=-2$.

Ответ: $\{(1,1),(-2,1),(1,-2),(-2,-2)\}$.

36. Очевидно, $m=\pm\sqrt{1999}$ не удовлетворяет условию.

Пусть $m\neq\pm\sqrt{1999}$.

Предположим, $m-\dfrac{1}{m}=x$, $m+\sqrt{1999}=y$, где $x,y\in Z$, тогда

$$\left(y-\sqrt{1999}\right)-\frac{1}{y-\sqrt{1999}}=x \Leftrightarrow y-\sqrt{1999}-\frac{y+\sqrt{1999}}{y^2-1999}=x \Leftrightarrow$$

$$y-\frac{y}{y^2-1999}-x=\sqrt{1999}\left(1+\frac{1}{y^2-1999}\right).$$ Если коэффициент при $\sqrt{1999}$ не равен 0, то $\sqrt{1999}$ является рациональным числом, что невозможно, значит $1+\dfrac{1}{y^2-1999}=0 \Leftrightarrow y^2=1998$, что невозможно, ибо $y\in Z$.

37. Предположим, $S$ является целым.

Очевидно, существует натуральное число $m$ такое, что $2^m\le n<2^{m+1}$.

Пусть $p$ – произведение всех нечетных чисел, не превосходящих $n$, тогда рассмотрим $N = 2^{m-1}pS$. Если $2^m < n < 2^{m+1}$, то среди чисел, не превосходящих $n$, только одно делится на $2^m$, а именно $2^m$. Действительно, пусть $k = 2^m l$, где $l > 1$, тогда $k \ge 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$, что невозможно, так как $2^{m+1} > n > k$. Если $n = 2^m$, то среди чисел, меньших $n$, ни одно не делится на $2^m$.

Итак, среди чисел $2^{m-1}p$, $\frac{2^{m-1}p}{2}$, ..., $\frac{2^{m-1}p}{n}$ ровно одно не является целым, а именно, $\frac{2^{m-1}p}{2^m} = \frac{p}{2}$ (так как $p$ нечетное число), значит $N = 2^{m-1}pS = 2^{m-1}p + \ldots + \frac{2^{m-1}p}{n}$ также не является целым, следовательно, $S$ не является целым, что и требовалось доказать.

38. Очевидно, $xyz \ne 0$. Имеем $x + y + z = xyz$.

Пусть для определенности $0 < |x| \le |y| \le |z|$, тогда $|xyz| = |x + y + z| \le |x| + |y| + |z| \le 3|z|$, значит $|xy| \le 3$, т.е. $xy = \pm 1; \pm 2; \pm 3$, тогда $x = \pm 1; \pm 2; \pm 3$. Аналогично $y = \pm 1; \pm 2; \pm 3$ и $z = \pm 1; \pm 2; \pm 3$. Таким образом, получаем следующие решения: $\{(\pm 1; \pm 2, \pm 3), (\pm 1; \pm 3, \pm 2), (\pm 2; \pm 1, \pm 3), (\pm 2; \pm 3, \pm 1), (\pm 3; \pm 1, \pm 2), (\pm 3; \pm 2, \pm 1)\}$.

Ответ:
$\{(\pm 1; \pm 2, \pm 3), (\pm 1; \pm 2, \pm 3), (\pm 2; \pm 1, \pm 3), (\pm 2; \pm 3, \pm 1), (\pm 3; \pm 1, \pm 2), (\pm 3; \pm 2, \pm 1)\}$.

39. 1) Пусть для определенности $x \ge y \ge z$, тогда $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{z}$, т.е. $z \le 3$.

Если $z = 1$, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$, что невозможно.

Если $z = 2$, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, причем $x \ge y$, значит $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{2}{y}$, т.е. $y \le 4$. Очевидно, $y \ne 2$.

Если $y = 3$, то $z = 6$; если $y = 4$, то $z = 4$.

Если $z = 3$, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, причем $x \ge y$, значит $\frac{2}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{2}{y}$, т.е. $y \le 3$, причем $y \ge z \ge 3$, значит $y = 3$, $z = 3$.

Итак, при $x \geq y \geq z$ имеем следующие решения: $\{(2,4,4),(3,3,3),(2,3,6)\}$.

Ответ:
$\{(2,4,4),(4,2,4),(4,4,2),(3,3,3),(2,3,6),(2,6,3),(3,2,6),(3,6,2),(6,2,3),(6,3,2)\}$.

2) 1-й способ.

Если $n=3$, то, например, $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=6$.

Пусть для некоторого $n$ набор чисел $(x_1, ..., x_n)$ является искомым, тогда набор чисел $(t_1, ..., t_{n+1})$ такой, что $t_1=2$, $t_2=2x_1$, $t_3=2x_2$, …, $t_{n+1}=2x_n$ удовлетворяет условию $\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_{n+1}}=1$.

2-й способ.

Если $n=3$, то, например, $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=6$.

Пусть для некоторого $n$ набор чисел $(x_1, ..., x_n)$ является искомым, причем $x_n$ четно, тогда набор чисел $(t_1, ..., t_{n+1})$ такой, что $t_1=x_1$, $t_2=x_2$, …, $t_{n-1}=x_{n-1}$, $t_n=x_n+2$, $t_{n+1}=\frac{x_n(x_n+2)}{2}$ удовлетворяет условию $\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_{n+1}}=1$, причем $t_1<...<t_{n+1}$.

3) Заметим, что набор чисел $x_1=...=x_n=n$ удовлетворяет исходному уравнению. Покажем, что уравнение $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}=r$ имеет конечное число решений в натуральных числах, где $r \in Q$.

При $n=1$ очевидно. Пусть данное утверждение справедливо для $n$ и докажем для $(n+1)$.

Пусть $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n+1}}=r$.

Пусть для определенности $x_1 \geq ... \geq x_{n+1}$, тогда $r=\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n+1}} \leq \frac{n+1}{x_{n+1}}$, $x_{n+1} \leq \frac{n+1}{r}$, т.е. $x_{n+1}$ принимает конечное число значений, причем, согласно предположению, для каждого $x_{n+1}$ уравнение $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}=r-\frac{1}{x_{n+1}}$ имеет конечное число решений, а значит в совокупности число решений будет конечно.

40. 1) Очевидно, что $x>1$, $y>1$, $z>1$, $t>1$.

Пусть для определенности $x \geq y \geq z \geq t$, тогда $1 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{4}{t^2}$, значит $t^2 \leq 4$, т.е. $t \leq 2$, причем $t > 1$, следовательно, $t = 2$.

Имеем $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{z^2}$ (так как $x \geq y \geq z$), значит $z^2 \leq 4$, причем $z > 1$, следовательно, $z = 2$.

Имеем $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{y^2}$ (так как $x \geq y$), значит $y^2 \leq 4$, т.е. $y \leq 2$, следовательно, $y = 2$, тогда $x = 2$.

Ответ: $\{(2,2,2,2)\}$.

2) Пусть для определенности $x_1 < x_2 < \ldots < x_s$, тогда $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$, $\ldots$, $x_s \geq s + 1$, следовательно, $\frac{1}{x_1{}^2} + \ldots + \frac{1}{x_s{}^2} \leq \frac{1}{2^2} + \ldots +$
$+ \frac{1}{(s+1)^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{s(s+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots +$
$+ \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = 1 - \frac{1}{s+1} < 1$, что противоречит условию.

3) Если $n = 2$, то $\frac{1}{12^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}$.

Пусть $n \geq 2$, $\frac{1}{x_0{}^2} = \frac{1}{x_1{}^2} + \ldots + \frac{1}{x_n{}^2}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, пусть

$y_0 = 12x_0$, $y_1 = 15x_0$, $y_2 = 20x_1$, $\ldots$, $y_{n+1} = 20x_n$, тогда $\frac{1}{y_0{}^2} = \frac{1}{y_1{}^2} + \ldots + \frac{1}{y_{n+1}{}^2}$, причем $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n+1}$, ибо $y_0 = 12x_0 < 15x_0 = y_1 < 20x_0 < 20x_1 = y_2 < 20x_2 = y_3 < \ldots < y_{n+1}$. Что и требовалось доказать.

4) Если $n = 1$, то $x_1 = 1$. Если $n \geq 2$, то $x_i \geq 2$; $i = 1, \ldots, n$.

Если $n = 2$, то $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$.

Если $n = 3$, то $\frac{1}{x_1{}^2} + \frac{1}{x_2{}^2} + \frac{1}{x_3{}^2} \leq \frac{3}{4} < 1$.

Если $n = 4$, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$.

Рассмотрим $n=5$.

Пусть для определенности $x_1 \le ... \le x_5$.

Если $x_1 \ge 3$, то $x_i \ge 3$, где $i=1,...,5$, тогда $\frac{1}{x_1^2}+...+\frac{1}{x_5^2} \le \frac{5}{9} < 1$, значит $x_1 = 2$, тогда $\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_5^2} = \frac{3}{4}$. Аналогично $x_2 = 2$, тогда $\frac{1}{x_3^2}+...+\frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{2}$. Аналогично $\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{4}$.

Аналогично $x_4 = 2$, тогда $\frac{1}{x_5^2} = 0$, что невозможно.

Если $n=6$, то, например, $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = 3$, $x_6 = 6$.

Если $n=7$, то, например, $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 4$.

Если $n=8$, то, например, $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = 3$, $x_6 = 7$, $x_7 = 14$, $x_8 = 21$.

Пусть $\frac{1}{t_1^2}+...+\frac{1}{t_n^2} = 1$, тогда $\frac{1}{x_1^2}+...+\frac{1}{x_{n+3}^2} = 1$, где $x_1 = t_1$, ..., $x_{n-1} = t_{n-1}$, $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = 2t_n$.

Таким образом, если исходное уравнение разрешимо для $n$, то оно разрешимо для $(n+3)$, и так как для $n = 6;7;8$ уравнение разрешимо, то оно разрешимо для любого $n \ge 6$.

Ответ: $\{n : n = 1; n = 4; n \ge 6\}$.

41. Пусть $d$ делит $x^{2^m}+1$, $x^{2^n}+1$, тогда $x^{2^m}+1 = da$, $x^{2^n}+1 = db$, $a,b \in N$, значит $da = x^{2^m}+1 = \left(x^{2^n}\right)^{2^{m-n}}+1 =$ $=(db-1)^2+1 = (dc+1)+1 = dc+2$, где $c \in N$, следовательно, $d(a-c) = 2$, т.е. $d=1$ или $d=2$, значит $d \ne 1999$, что и требовалось доказать.

42. Если $x>2$, $y>2$, $z>2$, то $x$, $y$, $z$ нечетные числа, тогда $x+y+z$ нечетное число, что противоречит условию.

Пусть для определенности $z=2$, тогда $\begin{cases} x+y = 2(n-1) \\ xy = 2(m-x-y) \end{cases}$.

Так как произведение простых чисел $x, y$ четно, то $x = 2$ или

$y = 2$. Пусть для определенности $y = 2$, тогда $x = 2(n-2)$ – четное число, значит $x = 2$, ибо $x$ простое.

Итак, $x = y = z = 2$, значит $m = 3$, $n = 6$.

Ответ: $\{x = y = z = 2, m = 3, n = 6\}$.

43. 1) Заметим, что каждое из чисел $p$, $q$ отлично от каждого из чисел $r$, $s$, $t$. Действительно, если, например, $p = r$, то $q^2 = s^2 + t^2$. Согласно № 26 (1-й способ), квадрат нечетного числа при делении на 4 и на 8 дает в остатке 1.

Если $s$, $t$ нечетные числа, то $s^2 + t^2 = (4n+1)+(4m+1)$, тогда $q^2 = 4(n+m)+2$ делится на 2, но не делится на 4, что невозможно. Если $s = t = 2$, то $q^2 = 8$, что невозможно. Итак, числа $s$, $t$ различной четности. Пусть для определенности $t$ нечетно, $s$ четно, т.е. $s = 2$, тогда $q^2 - t^2 = 4 \Leftrightarrow$ $(2a+1)^2 - (2b+1)^2 = 4 \Leftrightarrow$ $a(a+1) - b(b+1) = 1$, что невозможно, ибо $a(a+1)$, $b(b+1)$ четны.

Итак, числа $p$, $q$ отличны от чисел $r, s, t$. Если $p, q, r, s, t$ нечетные числа, то левая и правая части исходного уравнения имеют различную четность, что невозможно, значит одно из чисел $p, q, r, s, t$ является четным, т.е. равно 2.

Если $p = 2$, $q = 2$, тогда $r^2 + s^2 + t^2 = 8$, что невозможно. Если $p = 2$, $q$ нечетно, тогда $r, s, t$ отличны от $p = 2$, т.е. $r, s, t$ нечетные числа, значит $p^2 + q^2$ при делении на 4 дает в остатке 1, $r^2 + s^2 + t^2$ дает в остатке 3, что невозможно.

Если $r = 2$, тогда $p$, $q$ нечетные числа, значит $p^2 + q^2$ при делении на 8 дает в остатке 2, тогда $4 + s^2 + t^2 = 8l + 2$, $s^2 + t^2 = 8(l-1)+6$, однако $s^2 + t^2$ при делении на 8 дает в остатке $4+0$ или $4+1$ или $1+1$ или $1+0$ или $0+0$ или $4+4$, но не 6. Получено противоречие.

Итак, исходное уравнение неразрешимо.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2) 1-й способ.

Имеем $q^3 = (r^2 - p)(r^2 + p)$, причем $p$, $q$, $r$ простые, $r^2 - p < r^2 + p$, значит $\begin{cases} r^2 - p = 1 \\ r^2 + p = q^3 \end{cases}$ (1) или $\begin{cases} r^2 - p = q \\ r^2 + p = q^2 \end{cases}$. (2)

Из (1) находим $2p = q^3 - 1$.

Если $q = 2$, то $2p = 7$, что невозможно, значит $q > 2$, тогда $q$ нечетное число, т.е. $q = 2n + 1$, следовательно, $2p = (2n+1)^3 - 1 \Leftrightarrow p = n(4n^2 + 6n + 3)$, отсюда $n = 1$, ибо $p$ простое, т.е. $p = 13$, тогда $q^3 = 27$, $q = 3$, $r^4 = 13^2 + 3^3 = 196$, что невозможно.

Из (2) находим $2p = q(q-1)$. Если $q = 2$, то $p = 1$, что невозможно, значит $q > 2$, $q = 2n + 1$, тогда $p = n(2n+1)$, отсюда $n = 1$, ибо $p$ простое, т.е. $p = 2n + 1 = 3$, $q^2 - q = 6$, следовательно, $q = 3$, тогда $r^4 = 3^2 + 3^3$, что невозможно.

Итак, исходное уравнение неразрешимо.

2-й способ.

Пусть $p$, $r$ различной четности.

Имеем $q^3 = (r^2 - p)(r^2 + p)$. **(3)**

Предположим, существует простое число $s$, которое делит числа $r^2 + p$, $r^2 - p$. Очевидно, $s \neq 2$, так как $r^2 \pm p$ нечетны.

Тогда $s$ делит $(r^2 + p) \pm (r^2 - p)$, т.е. $s$ делит $2r^2$, $2p$, значит $s$ делит $r^2$, $p$, т.е. $s = r$, $s = p$, тогда $r = p$, следовательно, $q^3 = (r^2 - r)(r^2 + r) = r^2(r^2 - 1)$. Так как $r^2$, $r^2 - 1$ взаимно просты, то $r^2$, $r^2 - 1$ являются полными кубами некоторых натуральных чисел, однако квадрат простого числа $r$ не является кубом.

Итак, числа $r^2 \pm p$ взаимно просты, следовательно, из (3) $\begin{cases} r^2 - p = 1 \\ r^2 + p = q^3 \end{cases}$, что невозможно (см. 1-й способ).

Пусть $p$, $r$ одинаковой четности, тогда из (3) $q^3$ является четным, значит $q = 2$, тогда $(r^2 - p)(r^2 + p) = 8$, причем $r^2 \pm p$ четные числа, $r^2 - p < r^2 + p$, следовательно, $\begin{cases} r^2 - p = 2 \\ r^2 + p = 4 \end{cases} \Rightarrow r^2 = 3$, что невозможно.

Итак, исходное уравнение неразрешимо.

44. Лемма: если простое $p$ $(p > 2)$ делит $x^2 - a$, причем $a$, $p$ взаимно просты, тогда $p$ делит $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$.

Доказательство.

Предположим, $p$ делит $x$, тогда $p$ делит $x^2-(x^2-a)=a$, что противоречит условию леммы. Итак, $(p,x)=1$, значит, согласно теореме 4.1., $p$ делит $x^{p-1}-1$. Так как $p>2$, то $p$ нечетно. Так как р делит $x^2-a$, то $p$ делит $(x^2)^{\frac{p-1}{2}}-a^{\frac{p-1}{2}}=(x^{p-1}-1)+\left(a^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$,

следовательно, $p$ делит $a^{\frac{p-1}{2}}-1$. Лемма доказана.

1) Предположим, уравнение разрешимо.

Так как 7 делит $x^2-10$, то, согласно лемме, 7 делит $10^3-1$, что невозможно.

Таким образом, исходное уравнение неразрешимо.

2) Предположим, исходное уравнение разрешимо, тогда имеем $(5x)^2-35=55y$, значит 11 делит $z^2-35$, где $z=5x$, тогда, согласно лемме, $35^5-1$ делится на 11, что невозможно.

Таким образом, исходное уравнение неразрешимо.

3) Заметим, что условие леммы выполнено, а именно $15^5-1$ делится на 11.

Если $x=11k$, то $11(11k^2-y)=15$, что невозможно, так как 15 не делится на 11.

Если $x=11k\pm1$, то $11(11k^2\pm2k-y)=14$, что невозможно. Аналогично проверяем $x=11k\pm3$, $11k\pm4$, $11k\pm5$. Если $x=11k\pm2$, тогда находим $y=11k^2\pm4k-1$.

Ответ: $\{(11k\pm2, 11k^2\pm4k-1):k\in Z\}$.

45. 1) Заметим, что если $x^2+y^2$ делится на 3, то $x, y$ делится на 3 (см. № 26 (2-й способ)).

Имеем $x^2+y^2=3(1+y^2)$, значит $x^2+y^2$ делится на 3, тогда $x=3a$, $y=3b$, где $a,b\in Z$, тогда $(3a)^2-2(3b)^2=3\Leftrightarrow$ $3a^2-6b^2=\frac{1}{3}$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2) Если $x$ делится на 7, тогда, согласно условию, $y$ делится на 7, т.е. $x = 7a$, $y = 7b$, где $a, b \in Z$, тогда $14a^2 - 35b^2 = \frac{1}{7}$, что невозможно.

Итак, $y$ не делится на 7; аналогично $x$ не делится на 7. Заметим, что если $n$ не делится на 7, то $n^2$ при делении на 7 дает остатки 1, 2, 4, значит $2x^2$ дает в остатке 2, 4, 1, а число $5y^2$ дает в остатке 5, 3, 6, следовательно, $2x^2 - 5y^2$ не делится на 7, что противоречит условию.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

3) Имеем $5x^2 + 6x + 15 = (y+2)^2 \Leftrightarrow 25x^2 + 30x + 75 = 5(y+2)^2 \Leftrightarrow (5x+3)^2 + 66 = 5(y+2)^2 \Leftrightarrow 5z^2 - t^2 = 66$, где $z = y + 2$, $t = 5x + 3$.

Имеем $z^2 + t^2 = 3\left(2z^2 - 22\right)$, следовательно, $z^2 + t^2$ делится на 3, тогда $z$, $t$ делятся на 3, т.е. $z = 3a$, $t = 3b$, где $a, b \in Z$, значит $5a^2 - b^2 = \frac{22}{3}$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

46. Если $n$ не делится на 11, то согласно теореме 4.1., заключаем, что $n^{10} - 1$ делится на 11. Итак, остаток при делении $n^{10}$ на 11 равен либо 0, либо 1.

Имеем $x^{10} = 11m + a$, $y^{10} = 11n + b$, $z^{10} = 11k + c$, где $m, n, k \in Z$, а числа $a$, $b$, $c$ принимают значение 0 или 1. Имеем $11(m + n - k) + a + b - c = 1999 = 181 \cdot 11 + 8 \Leftrightarrow$ $11(m + n - k - 181) = 8 - a - b + c$, что невозможно, ибо $6 \le 8 - a - b + c \le 9$, следовательно, $8 - a - b + c$ не делится на 11.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

47. Имеем $(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 = 7$. Приведем числа $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$ к общему знаменателю, получим $2x + 1 = \frac{a}{d}$, $2y + 1 = \frac{b}{d}$, $2z + 1 = \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \in Z$ $(d \ne 0)$, тогда $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$. Пусть $(a, b, c, d) = s$, тогда $a = ms$, $b = ns$,

$c = ks$, $d = ls$, где $(m, n, k, l) = 1$, причем $m^2 + n^2 + k^2 = 7l^2$. **(1)**

Так как $(m, n, k, l) = 1$, то хотя бы одно из чисел $m$, $n$, $k$, $l$ является нечетным, причем $m^2 + n^2 + k^2 + l^2 = 8l^2$ делится на 8, значит среди чисел $m$, $n$, $k$, $l$ ровно два нечетны, ровно два четны либо $m$, $n$, $k$, $l$ нечетны.

Если $m$, $n$, $k$, $l$ нечетны, тогда $\mathrm{m}^2, n^2, k^2, l^2$ при делении на 8 дает в остатке 1 (см. № 26 (1-й способ)), тогда $\mathrm{m}^2 + n^2 + k^2 + l^2$ при делении на 8 дает в остатке 4, что противоречит (1).

Пусть, например, $m$, $n$ нечетные, $k$, $l$ четные, тогда $m^2 + n^2 + k^2 = 7l^2 \Leftrightarrow$ $(2u+1)^2 + (2v+1)^2 + (2w)^2 = 7(2t)^2 \Leftrightarrow$ $u^2 + u + v^2 + v + w^2 - 7t^2 + 1 = \frac{1}{2}$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

48. Имеем $(x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1) + 1 = 2 \cdot 999y \Leftrightarrow$ $(x + y + 1)^2 + 1 = 2 \cdot 999y$, следовательно, $z^2 + 1$ делится на 3, где $z = x + y + 1$.

Если $z = 3k$, то $z^2 + 1 = 9k^2 + 1$ не делится на 3.

Если $z = 3k \pm 1$, то $z^2 + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 2$ не делится на 3.

Получено противоречие.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

49. 1-й способ.

Имеем $21(yz + 1) = 16(xyz + x + z) \Leftrightarrow$ $\frac{(xyz + x) + z}{yz + 1} = \frac{21}{16} \Leftrightarrow$

$x + \frac{z}{yz+1} = 1 + \frac{5}{16} \Leftrightarrow$ $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}$, значит $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$.

Действительно, $x - 1 = \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} - \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$, причем $0 < \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} < 1$, $0 < \frac{1}{y + \frac{1}{z}} < 1$, значит $-1 < \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} - \frac{1}{y + \frac{1}{z}} < 1$, т.е. $-1 < x - 1 < 1$, тогда $x - 1 = 0$, т.е. $x = 1$, следовательно, $y + \frac{1}{z} = 3 + \frac{1}{5} \Leftrightarrow$ $y - 3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{z}$.

Аналогично $-1<\frac{1}{5}-\frac{1}{z}<1$, значит $-1<y-3<1$, тогда $y-3=0$, $y=3$, следовательно, $z=5$.

Ответ: $\{(1, 3, 5)\}$.

2-й способ.

Имеем $yz(16x-21)=21-16(x+z)$. **(1)**

Если $x \geq 2$, то правая часть (1) является отрицательной, а левая – положительной, что невозможно. Итак, $x=1$, тогда $z(5y-16)=-5$. Если $y \geq 4$, то $z(5y-16)>0$, что невозможно. Итак, $y \leq 3$.

Если $y=1$, то $z=\frac{5}{11}$; если $y=2$, то $z=\frac{5}{6}$; если $y=3$, то $z=5$.

Ответ: $\{(1, 3, 5)\}$.

50. 1-й способ.

Имеем $\begin{cases} z=x^2+y \\ z^2=y^2+x+2 \end{cases} \Rightarrow \quad (x^2+y)^2=y^2+x+2 \Leftrightarrow$ $x(x^3+2xy-1)=2$, значит $x$ делит 2, т.е. $x=\pm 1; \pm 2$.

Если $x=1$, то $y=1$, $z=x^2+y=2$;

если $x=-1$, то $y=0$, $z=1$;

если $x=-2$, то $y=-2$, $z=2$;

если $x=2$, то $y=-\frac{3}{2}$, что невозможно.

Ответ: $\{(1, 1, 2), (-1, 0, 1), (-2, -2, 2)\}$.

2-й способ.

Имеем $\begin{cases} z-y=x^2 \\ z^2-y^2=x+2 \end{cases}$. Очевидно, $z \neq y$.

Имеем $z+y=\frac{z^2-y^2}{z-y}=\frac{x+2}{x^2}$, т.е. $x^2$ делит $x+2$ или $x=-2$, значит $|x+2| \geq x^2$ или $x=-2$.

$|x+2| \geq x^2 \Leftrightarrow (x+2)^2-x^4 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+x+2)(x^2-x-2) \leq 0$, причем $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$, следовательно, $x^2-x-2\le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 2$.

Итак, $x=\pm 1;\pm 2$. Далее аналогично предыдущему способу находим все решения системы.

51. 1-й способ.

Заметим, что $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$, тогда, согласно условию, имеем $(x+y)(y+z)(z+x)=8$, причем $(x+y)+(y+z)+(z+x)=2(x+y+z)=6$.

Таким образом числа $x+y$, $y+z$, $z+x$ либо все четные, либо ровно одно из них четное, значит $\begin{cases} x+y=2;\,8;\,-1;-1 \\ y+z=2;\,-1;\,8;\,-1 \\ z+x=2;\,-1,\,-1,\,8 \end{cases}$,

следовательно, $(x,y,z)=\{(1\ 1,1),(4,4,-5),(4,-5,4),(-5,4,4)\}$

2-й способ.

Имеем

$$x^2-xy+y^2=\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{3-z^3}{3-z}=\frac{(27-z^3)-24}{3-z}=9+3z+z^2-\frac{24}{3-z},$$

значит $3-z$ делит 24.

Заметим, $3-z$ не делится на 3.

Действительно, предположим $3-z=3m$, где $m\in Z$, тогда $z=3(1-m)=3n$, где $n\in Z$.

Имеем $x^3+y^3=3-z^3=3(1-9n^2)$ делится на 3, но не делится на 9, что невозможно, ибо

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(3-z)^3-3xy(3-z)=(3m)^3-3xy(3m)$$

делится на 9. Получено противоречие. Итак, $3-z$ не делится на 3, однако $3-z$ делит $3\cdot 8=24$, значит $3-z$ делит 8, т.е. $3-z=\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 8$, следовательно, $z=4;\,5;7;11;\,2;\,1;\,-1;\,-5$. Аналогично $x,\,y=4;\,5;\,7;\,11;\,2;\,1;\,-1;\,-5$, тогда с учетом условия получаем следующие решения: $\{(1,1,1),(4,-5,4),(-5,4,4),$ $(4,4,-5)\}$.

Ответ: $\{(1,1,1),(4,-5,4),(-5,4,4),(4,4,-5)\}$.

52. 1-й способ.

Если $x=0$, тогда $zt=0$, значит $z=0$ или $t=0$, следовательно, $6y^2=2t^2$ или $6y^2=2z^2$ соответственно, т.е. $t=\pm\sqrt{2}y$ или $z=\pm\sqrt{3}y$, тогда получаем $y=0$ (иначе $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$ является рациональным числом, что невозможно), значит $2z^2+3t^2=x^2+6y^2=0$, следовательно, $z=t=0$. Аналогично рассматривая $y=0$ или $z=0$ или $t=0$, получим $x=y=z=t=0$. Пусть $xyzt\neq 0$. Так как $x$ делит $zt$, то $x=ab$, где $a$ делит $t$, $b$ делит $z$, т.е. $t=ac$, $z=bd$, значит $y=\dfrac{zt}{x}=cd$. Имеем $(ab)^2+6(cd)^2=2(bd)^2+3(ac)^2 \Leftrightarrow (b^2-3c^2)(a^2-2d^2)=0$, где $a,b,c,d\in Z$, следовательно, $b^2=3c^2$ или $a^2=2d^2$, т.е. $b=\pm\sqrt{3}c$ или $a=\pm\sqrt{2}d$, тогда $c=0$ или $d=0$, что противоречит предположению.

Итак, $x=y=z=t=0$.

2-й способ.

Аналогично предыдущему способу можно считать, что $xyzt\neq 0$. Выберем решения с наименьшим значением величины $|x|$.

Имеем $x^2+z^2=3(t^2-2y^2+z^2)$, значит $x^2+z^2$ делится на 3, следовательно, $x$, $z$ делятся на 3 (см. № 26.1 (2-й способ)), т.е. $x=3a$, $z=3c$, где $a,c\in Z$, тогда $\begin{cases} t^2+6c^2=3a^2+2y^2 \\ ay=ct \end{cases}$, значит $t^2+y^2=3(a^2+y^2-2c^2)$ делится на 3, следовательно, $y=3b$, $t=3d$, где $b,d\in Z$, тогда $\begin{cases} a^2+6b^2=2c^2+3d^2 \\ ab=cd \end{cases}$.

Таким образом, набор $(a,b,c,d)$ удовлетворяет исходной системе, причем $|x|=|3a|>|a|$, что противоречит определению $|x|$.

Ответ: $\{(0,0,0,0)\}$.

53. 1-й способ.

Согласно условию, имеем $(x+y)(z+t)=xyzt \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yt}+\dfrac{1}{xt}+\dfrac{1}{yz}=1$. Так как $x\le y$,

$x \le z \le t$, то $xz \le xt$, $xz \le yz \le yt$. Пусть $zx = a$, $xt = b$, $yz = c$, $yt = d$, тогда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$, причем $a \le b$, $a \le c \le d$, тогда $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \le \frac{4}{a}$, значит $a \le 4 \Leftrightarrow zx \le 4 \Rightarrow x^2 \le xz \le 4$, т.е. $x \le 2$.

Если $x=1$, то $\begin{cases} y+1=zt \\ y=z+t \end{cases} \Rightarrow zt=z+t+1 \Leftrightarrow (z-1)(t-1)=2$, причем $z-1 \le t-1$, значит $\begin{cases} z-1=1 \\ t-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow z=2$, $t=3$; $y=z+t=5$.

Если $x=2$, то $\begin{cases} y+2=zt \\ 2y=z+t \end{cases} \Rightarrow 2(zt-2)=z+t \Leftrightarrow$ $(2z-1)(2t-1)=9$, причем $2z-1 \le 2t-1$, следовательно, $\begin{cases} 2z-1=3 \\ 2t-1=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2z-1=1 \\ 2t-1=9 \end{cases} \Leftrightarrow (z, t)=\{(1, 5), (2, 2)\}$, однако $x \le z$, значит пара $(1, 5)$ не удовлетворяет условию.

Итак, $z=t=2$, $y=zt-2=2$.

Ответ: $\{(2, 2, 2, 2), (1, 5, 2, 3)\}$.

2-й способ.

Согласно условию, имеем $xy+zt=x+y+z+t \Leftrightarrow$ $(xy-x-y+1)+(zt-z-t+1)=2 \Leftrightarrow$

$$(x-1)(y-1)+(z-1)(t-1)=2, \qquad \textbf{(1)}$$

и так как $x \le y$, $x \le z \le t$, то из (1) получаем $(x-1)^2+(x-1)^2 \le 2 \Leftrightarrow |x-1| \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$, причем $x \in N$, значит $x=1$ или $x=2$.

Далее аналогично 1-му способу.

3-й способ.

Предположим, $x \ge 3$, тогда $z \ge x \ge 3$, $t \ge z \ge x \ge 3$, следовательно, $z=c+2$, $t=d+2$, где $c, d \in N$.

Имеем $zt=(c+2)(d+2)=cd+2c+2d+4 \ge c+d+7=z+t+3$. Аналогично из $x \ge 3$, $y \ge x \ge 3$ получим $xy \ge x+y+3$.

Имеем $zt \geq z+t+3 = xy+3 \geq x+y+6 = zt+6$, что невозможно. Итак, $x<3$, т.е. $x=1$ или $x=2$.

Далее аналогично 1-му способу.

Ответ: $\{(2, 2, 2, 2), (1, 5, 2, 3)\}$.

54. 1) Имеем $\dfrac{x^{1999}}{x+n} = \dfrac{\left(x^{1999}+n^{1999}\right)-n^{1999}}{x+n} =$

$= x^{1998} - x^{1997}n + \ldots - xn^{1997} + n^{1998} - \dfrac{n^{1999}}{x+n}$, значит, согласно условию, $\dfrac{n^{1999}}{x+n}$ является целым для любого целого $x(x \neq -n)$, например $x = 3n^{1999} - n$, тогда $\dfrac{n^{1999}}{x+n} = \dfrac{1}{3}$, что невозможно, следовательно, $n=0$.

Ответ: $\{0\}$.

2) Имеем $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$, тогда $\dfrac{x^3+y^3+3nxy}{x+y-n} = \dfrac{\left(x^3+y^3-n^3-3xy(-n)\right)+n^3}{x+y-n} =$

$= x^2+y^2+n^2+xn+yn-xy+\dfrac{n^3}{x+y-n}$, тогда $x+y-n$ делит $n^3$ для любых целых $x$, $y$ $(x+y \neq n)$, значит $n=0$.

Ответ: $\{0\}$.

55. Если $x=1$, то $y=2$. Предположим, $x \geq 2$. Имеем $\begin{cases} 1+x=2^a \\ 1+x^2=2^b \end{cases}$, где $a, b \in N$, $a+b=y$, причем $2^a = 1+x < 1+x^2 = 2^b$, значит $a<b$, тогда $a+1 \leq b$.

Имеем $1+\left(2^a-1\right)^2 = 2^b \Leftrightarrow 2^{a+1}\left(2^{b-a-1}-2^{a-1}+1\right)=2$, что невозможно, так как левая часть равенства делится на $2^{a+1}$, значит на $2^2=4$, а правая часть не делится на 4.

Ответ: $\{(1,2)\}$.

56. 1) Пусть $d=(x, y)$, тогда $x=da$, $y=db$, где $(a,b)=1$.

Так как $d^2$ делит $2^n$, то $d=2^k$, где $k \geq 0$, $k \in Z$, $(2k \leq n)$.

Имеем $a^2+b^2=2^{n-2k}$, т.е. $a^2+b^2=2^m$. **(1)**

Предположим, $m \geq 2$.

Так как $(a, b)=1$, то $a$ или $b$ является нечетным числом, из (1) заключаем, что $a$, $b$ нечетны, тогда $a^2+b^2$ при делении на 4 дает в остатке 2, однако $2^m$ делится на 4, следовательно, получено противоречие равенству (1).

Итак, $m<2$, т.е. $m=1$, тогда $a^2+b^2=2$, $a=b=1$, $x=2^k$, $y=2^k$, $x^2+y^2=2^{2k+1}$, $2k+1=n$.

Ответ: если $n=2k$, то $\{\varnothing\}$;

если $n=2k+1$, то $\{(2^k, 2^k)\}$.

2) Пусть $d=(x, y, z)$, тогда $x=da$, $y=db$, $z=dc$, где $(a, b, c)=1$.

Так как $d^2$ делит $2^n$, то $d=2^k$, где $k \in Z$, $k \geq 0$.

Имеем $a^2+b^2+c^2=2^{n-2k}=2^m$, где $m=n-2k$, $m \in N$.

Так как $a, b, c \in N$, то $a^2+b^2+c^2 \geq 3$, значит $2^m \geq 3$, т.е. $m \geq 2$.

Так как $(a, b, c)=1$, то хотя бы одно из чисел $a$, $b$, $c$ нечетно, причем $a^2+b^2+c^2=2^m$ четно, значит среди чисел $a$, $b$, $c$ ровно два нечетных и одно четное. Имеем $(2r+1)^2+(2s+1)^2+(2t)^2=2^m \Leftrightarrow \frac{1}{2}=2^{m-2}-r^2-s^2-r-s-t^2$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

3) Пусть $d=(x, y, z, t)$, тогда $x=da$, $y=db$, $z=dc$, $t=ds$, где $(a, b, c, s)=1$.

Так как $d^2$ делит $2^n$, то $d=2$ , где $k \in Z$, $k \geq 0$.

Имеем $a^2+b^2+c^2+s^2=2^m$, где $m=n-2k$, $m \in N$.

Предположим, $m \geq 3$.

Так как $(a, b, c, s)=1$, тогда хотя бы одно из чисел $a, b, c, s$ является нечетным, причем $a^2+b^2+c^2+s^2=2^m$ делится на 8, так как $m \geq 3$, следовательно, либо $a, b, c, s$ нечетные числа, либо среди $a, b, c, s$ ровно два четных числа и два нечетных. Если $a, b, c, s$ нечетные числа, тогда $a^2+b^2+c^2+s^2$ при делении на 8 дает в остатке 4, а если среди $a, b, c, s$ два четных и два нечетных,

тогда $(2l+1)^2+(2r+1)^2+(2t)^2+(2u)^2=2^m \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}=2^{m-2}-l^2-l-$
$-r^2-r-t^2-u^2$, что невозможно.

Итак, $m<3$, т.е. $m=1$ или $m=2$, однако $2^m=a^2+b^2+c^2+s^2 \geq 1+1+1+1=4$, т.е. $m \geq 2$, значит $m=2$, тогда $a=b=c=s=1$, $x=y=z=t=2^k$, $x^2+y^2+z^2+t^2=2^{2k+2}$, $2k+2=n$.

Ответ: если $n$ нечетно, то $\{\varnothing\}$;

если $n=2k+2$, где $k \in Z$, $k \geq 0$, тогда $\{(2^k, 2^k, 2^k, 2^k)\}$.

57. Имеем $(y-1)(y+1)=5z^x$, причем $z$ простое, значит $\begin{cases} y-1=5z^a \\ y+1=z^b \end{cases}$ или $\begin{cases} y-1=z^b \\ y+1=5z^a \end{cases}$, где $a,b$ целые неотрицательные числа, $a+b=x$, тогда $5z^a-z^b=\pm 2$. **(1)**

Если $a=0$, тогда $5-z^b=\pm 2$, значит $z=7$, $b=1$ или $z=3$, $b=1$, т.е. $z=7$, $x=a+b=1$, $y=6$ или $z=3$, $x=a+b=1$, $y=4$.

Если $b=0$, то $5z^a-1=\pm 2$, что невозможно.

Пусть $a \geq 1$, $b \geq 1$, тогда из (1) $z(5z^{a-1}-z^{b-1})=\pm 2$, значит $z=2$, тогда $5 \cdot 2^{a-1}-2^{b-1}=\pm 1$. **(2)**

Если $a \geq b$, тогда из (2) $2^{b-1}(5 \cdot 2^{a-b}-1)=\pm 1$, значит $2^{b-1}=1$, $5 \cdot 2^{a-b}-1=\pm 1$, что невозможно.

Если $a \leq b$, то $2^{a-1}(5-2^{b-a})=\pm 1$, значит $2^{a-1}=1$, $5-2^{b-a}=\pm 1$, т.е. $a=1$, $5-2^{b-1}=\pm 1$, тогда $2^{b-1}=6$ или $2^{b-1}=4$, следовательно, $b-1=2$, $b=3$, $x=a+b=4$, $y^2=1+5 \cdot 2^4=81$, $y=9$.

Ответ: $\{(1,4,3), (1,6,7), (4,9,2)\}$.

58. Заметим, что пара чисел $(3,1)$ является решением. Пусть $x=3+a$, $y=1+b$, где $a, b \in Q$. Если $b=0$, то $y=1$, $x=\pm 3$.

Пусть $b \neq 0$, тогда $(a+3)^2-7(b+1)^2=2 \Leftrightarrow$
$a^2+6a-7b^2-14b=0$. **(1)**

Пусть $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, где $m, n \in Z$ $(n \neq 0)$, тогда $a=\frac{m}{n}b$,

$\left(\frac{m}{n}b\right)^2+6\frac{m}{n}b-7b^2-14b=0$, где $b\neq 0$, значит $b=\frac{14n^2-6mn}{m^2-7n^2}$,

$a=\frac{m}{n}b=\frac{14mn-6m^2}{m^2-7n^2}$, $x=3+a$, $y=1+b$.

Ответ: $\left\{(\pm 3,1),\left(3+\frac{14mn-6m^2}{m^2-7n^2},1+\frac{14n^2-6mn}{m^2-7n^2}\right): m,n\in Z, n\neq 0\right\}$.

59. Лемма.

Пусть $n=p_1^{m_1}\dots p_k^{m_k}$, где $p_i$ различные простые числа, $m_i\in N$, тогда число делителей числа $n$ равно $\tau(n)=(m_1+1)\dots(m_k+1)$.

Доказательство.

Всякий делитель числа $n$ имеет вид $p_1^{i_1}\dots p_k^{i_k}$, где $i_1=0,1,\dots,m_1$; …; $i_k=0,1,\dots,m_k$. Так как $i_1$ принимает $(m_1+1)$ значение, …, $i_k$ принимает $(m_k+1)$ значение, то число делителей числа $n$ равно $\tau(n)=(m_1+1)\dots(m_k+1)$.

Лемма доказана.

Согласно условию, имеем $(m_1+1)\dots(m_k+1)=1999$, причем 1999 простое число, значит $k=1$, т.е. $m_1+1=1999$, $m_1=1998$, $n=p^{1998}$, следовательно, $n$ не делится на произведение различных простых чисел $2\cdot 5=10$, таким образом, $n$ не оканчивается нулем.

60. Пусть $n=p_1^{a_1}\dots p_k^{a_k}$, тогда $n^2=p_1^{2a_1}\dots p_k^{2a_k}$, где $p_i$ различные простые числа.

Согласно лемме (№ 59), имеем $\tau(n^2)=3\tau(n)\Leftrightarrow$ $(2a_1+1)\dots(2a_k+1)=3(a_1+1)\dots(a_k+1)\Leftrightarrow$

$$\left(2-\frac{1}{a_1+1}\right)\dots\left(2-\frac{1}{a_k+1}\right)=3. \qquad \textbf{(1)}$$

$a_k\geq 1\Leftrightarrow \frac{1}{a_{k+1}}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2-\frac{1}{a_{k+1}}\geq\frac{3}{2}$, с учетом (1) имеем

$3\geq\left(\frac{3}{2}\right)^k$, значит $k=1$ или $k=2$.

Если $k=1$, то $2a_1+1=3(a_1+1)$, что невозможно, ибо $a_1>0$.

Если $k=2$, то $(2a_1+1)(2a_2+1)=3(a_1+1)(a_2+1)\Leftrightarrow$ $(a_1-1)(a_2-1)=3$. Примем для определенности $a_1>a_2$, тогда $\begin{cases}a_1-1=3\\a_2-1=1\end{cases}\Leftrightarrow a_1=4,\ a_2=2,\ n=p_1^{\ 4}p_2^{\ 2}$.

Ответ: { $p_1^{\ 4}p_2^{\ 2}$, где $p_1$, $p_2$ различные простые числа}.

61. Пусть $2n=p_1^{\ a_1}\dots p_k^{\ a_k}$, тогда согласно лемме (№ 59), $\tau(2n)=(a_1+1)\dots(a_k+1)$. Согласно условию, $\tau(2n)=n$, значит $(a_1+1)\dots(a_k+1)=n\Leftrightarrow$ $b_1\dots b_k=n$, где $b_i=a_i+1$, $b_i\ge2$, тогда $2n=p_1^{\ b_1-1}\dots p_k^{\ b_k-1}$, значит $p_1^{\ b_1-1}\dots p_k^{\ b_k-1}=2b_1\dots b_k$. **(1)**

Предположим, $k\ge3$, тогда, считая для определенности $p_1<p_2<\dots<p_k$, получим $p_1\ge2$, $p\ \ \ge3$, $p_k\ge p_3\ge4$.

Имеем $2b_1\dots b_k=p_1^{\ b_1-1}\dots p_k^{\ b_k-1}>2^{b_1-1}\dots2^{b_{k-1}-1}4^{b_k-1}=$ $=2^{b_k-1}\left(2^{b_1-1}\dots2^{b_k-1}\right)\ge2^{b_k-1}(b_1\dots b_k)\ge2b_1\dots b_k$, что невозможно. (Мы воспользовались неравенством $2^{m-1}\ge m$, которое справедливо для любого целого $m\ge1$).

Итак, $k=1$ или $k=2$.

Если $k=1$, то $p_1^{\ b_1-1}=2b_1$, значит $p_1$ четно, тогда $p=2$, $2^{b_1-1}=2b_1$. Заметим, что $2^{b_1-1}>2b_1$, если $b_1>4$. Таким образом, $b_1\le4$. Находим $b_1=4$, $n=b_1=4$. Если $k=2$, то $p_1^{\ b_1-1}p_2^{\ b_2-1}=2b_1b_2$, значит $p_1=2$ или $p_2=2$, однако $p_1<p_2$, значит $p_1=2$, тогда $2^{b_1-1}p_2^{\ b_2-1}=2b_1b_2$.

Если $p_2\ge5$, тогда $2^{b_1-1}p_2^{\ b_2-1}\ge2^{b_1-1}5^{b_2-1}>b_1(2b_2)=2b_1b_2$, что невозможно.

Итак, $p_2=3$. Имеем $2^{b_1-1}3^{b_2-1}=2b_1b_2$.

Если $b_2\ge3$, тогда $2^{b_1-1}3^{b_2-1}>b_1(2b_2)$, что невозможно. Итак, $b_2=2$, тогда $3\cdot2^{b_1-1}=4b_1$. Если $b_1>3$, тогда $3\cdot2^{b_1-1}>4b_1$, что невозможно.

Итак, $b_1\le3$. Находим $b_1\ne2$, $b_1=3$, $n=b_1b_2=6$.

Ответ: $\{4,6\}$.

62. Пусть число $N=\overline{ab...c}$ содержит $n$ цифр. Пусть $k=\overline{b...c}$, тогда $k$ содержит $(n-1)$ цифру.

Имеем $\overline{b...ca}=m\overline{ab...c} \Leftrightarrow 10k+a=m\left(10^{n-1}a+k\right) \Leftrightarrow$

$$a=\frac{(10-m)k}{10^{n-1}m-1}. \qquad (1)$$

Из (1) заключаем $10-m>0$, т.е. $m\le 9$.

Если $m=1$, тогда, например, $N=11$.

Если $6\le m\le 9$, тогда $1\le a=\dfrac{(10-m)k}{10^{n-1}-1}<\dfrac{(10-m)10^{n-1}}{10^{n-1}m-1}<1$.

Действительно, $(10-m)10^{n-1}<10^{n-1}m-1 \Leftrightarrow 10^{n-1}(10-2m)<-1$, что справедливо, ибо $10-2m\le -2$ (так как $m\ge 6$), значит $(10-2m)10^{n-1}\le -2\cdot 10^{n-1}<-1$. Таким образом, $a<1$, что невозможно.

Если $m=2$, тогда из (1) $a=\dfrac{8k}{2\cdot 10^{n-1}-1}$. Так как знаменатель дроби является нечетным числом, то $2\cdot 10^{n-1}-1$ делит $k$, что невозможно, так как $2\cdot 10^{n-1}-1>10^{n-1}>k$. Если $m=4$, тогда из (1) $a=\dfrac{6k}{4\cdot 10^{n-1}-1}$.

Так как знаменатель дроби является нечетным числом, то $4\cdot 10^{n-1}-1$ делит $3k$, что невозможно, ибо $4\cdot 10^{n-1}-1>3\cdot 10^{n-1}>3k$. Если $m=5$, тогда из (1) $a=\dfrac{5k}{5\cdot 10^{n-1}-1}$.

Так как знаменатель дроби не делится на 5, то $5\cdot 10^{n-1}-1$ делит $k$, что невозможно, так как $5\cdot 10^{n-1}-1>10^{n-1}>k$.

Если $m=3$, то $a=\dfrac{7k}{3\cdot 10^{n-1}-1}$.

Заметим, что $3\cdot 10^5-1=7\cdot 42857$, тогда, если $n=6$, $k=42857$, $a=1$, получаем $N=142857$, причем $3\cdot 142857=428571$.

Ответ: $\{1, 3\}$.

63. 1) Если $z=1$, то $x=-y$.

Пусть $z\ne 1$. Имеем $\begin{cases} x^3+y^3=1-z^2 \\ x+y=1-z \end{cases}$

$x^2-xy+y^2=\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=\dfrac{1-z^2}{1-z}=1+z$, значит $x^2-xy+y^2+x+$ $+y=(1+z)+(1-z)=2$. Имеем $x^2-x(y-1)+y^2+y=2\Leftrightarrow$ $4x^2-4x(y-1)+4y^2+4y-8=0\Leftrightarrow(2x-(y-1))^2+3(y+1)^2=12\Rightarrow$ $12\geq 3(y+1)^2\Leftrightarrow\ |y+1|\leq 2\Leftrightarrow\ -3\leq y\leq 1$, т.е. $y=-3;-2;\pm 1;0$, тогда из равенства $x^2-x(y-1)+y^2+y-2=0$ находим $(x,y)=\{(-2,-3),(-3,-2),(0,-2),(-2,0),(0,1),(1,0)\}$, причем $z=1-x-y$, значит $(x,y,z)=\{(-2,-3,6),(-3,-2,6),(0,1,0),$ $(1,0,0),(-2,0,3),(0,-2,3)\}$.

Ответ: $\{(-2,-3,6),(-3,-2,6),(0,1,0),(1,0,0),(-2,0,3),(0,-2,3)\}$.

2) Если $z=2$, то $\begin{cases}x^3+y^3=-2\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow\ x^3+(-x)^3=2$, что невозможно. Имеем $x^2-xy+y^2=\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=\dfrac{2-z^2}{2-z}=z+2+\dfrac{2}{z-2}$, значит $z-2$ делит 2, т.е. $z-2=\pm 1;\pm 2$, следовательно, $z=0;1;3;4$.

Имеем

$2-z^2=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(2-z)^3-3xy(2-z)$, значит $xy=\dfrac{(2-z)^3+z^2-2}{3(2-z)}$. Таким образом, $\begin{cases}x+y=2-z\\xy=\dfrac{(2-z)^3+z^2-2}{3(2-z)}\end{cases}$.

При подстановке значений $z=0;1;3;4$ в последнюю систему находим $(x,y,z)=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(-2,1,3),(1,-2,3)\}$.

Ответ: $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(-2,1,3),(1,-2;3)\}$.

64. 1) Имеем $4x(x+1)=16y(y+1)\Leftrightarrow\ 4x^2+4x+1=16y^2+$ $+16y+1\Leftrightarrow\ (2x+1)^2=(4y+2)^2-3\Leftrightarrow\ (4y+2)^2-(2x+1)^2=3\Leftrightarrow$

$$(4y-2x+1)(4y+2x+3)=3\Leftrightarrow\begin{cases}4y+2x+3=\pm 3;\pm 1\\4y-2x+1=\pm 1;\pm 3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$(x,y)=\{(0,0),(0,-1),(-1,0),(-1,-1)\}$.

Ответ: $\{(0,0),(0,-1),(-1,0),(-1,-1)\}$.

2) Покажем, что исходное уравнение не имеет решений в натуральных числах. От противного. Имеем

$$4x^2+4x=p^{2n}\left(4y^2+4y\right)\Leftrightarrow\ (2x+1)^2-1=p^{2n}(2y+1)^2-p^{2n}\Leftrightarrow$$

$$\left(p^n(2y+1)-(2x+1)\right)\left(p^n(2y+1)+(2x+1)\right)=p^{2n}-1\text{, значит}$$

$$p^{2n}-1\geq p^n(2y+1)+2x+1>2x+1\Rightarrow\ p^{2n}>2x+2. \qquad (1)$$

Так как $(x,x+1)=1$ и $p^{2n}$ делит $x(x+1)$, то $p^{2n}$ делит $x$ или $p^{2n}$ делит $x+1$. В любом случае $x+1\geq p^{2n}$, тогда с учетом (1) получаем $p^{2n}>2(x+1)\geq 2p^{2n}$, что невозможно, что и требовалось доказать.

Если $x=0$, то $y=0$ или $y=-1$. Если $x=-1$, то $y=0$ или $y=-1$.

Пусть $x<-1$, тогда $-x-1>0$. Пусть $a=-x-1$, тогда $a(a+1)=p^{2n}y(y+1)$, где $a\in N$, причем $y(y+1)>0\Leftrightarrow\ y>0$ или $y<-1$. Если $y>0$, т.е. $y\in N$, тогда уравнение $a(a+1)=p^{2n}y(y+1)$ неразрешимо. Если $y<-1$, тогда $b=-y-1>0$, т.е. $b\in N$, причем $a(a+1)=p^{2n}b(b+1)$ неразрешимо.

Ответ: $\{(0,\,0),(0,\,-1),(-1,\,0),(-1,\,-1)\}$.

65. Пусть $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=z$, где $z\in N$, тогда $xy=zx+zy\Leftrightarrow$ $(x-z)(y-z)=z^2$. Пусть $(x,y,z)=k$, тогда $x=ka$, $y=kb$, $z=kc$, где $(a,b,c)=1$, причем $(a-c)(b-c)=c^2$. (1)

Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $a-c$, $b-c$, тогда из (1) $p^2$ делит $c^2$, т.е. $p$ делит $c$, значит $p$ делит числа $(a-c)+c=a$, $(b-c)+c=b$, что невозможно, ибо $(a,\,b,\,c)=1$.

Итак, $(a-c,b-c)=1$, значит из (1) $\begin{cases}a-c=m^2\\b-c=n^2\\c^2=m^2n^2\end{cases}$ или $\begin{cases}a-c=-m^2\\b-c=-n^2\\c^2=m^2n^2\end{cases}$, где $m, n \in N$, следовательно, $\begin{cases} a = m(m+n) \\ b = n(n+m) \\ c = mn \end{cases}$ или $\begin{cases} a = m(n-m) \\ b = n(m-n) \\ c = mn \end{cases}$.

Так как $m, n \in N$, то хотя бы одно из чисел $m(n-m)$, $n(m-n)$ не превосходит нуль, что невозможно. Итак, $a = m(m+n)$, $b = n(m+n)$, $c = mn$, $x = mk(m+n)$, $y = nk(m+n)$.

Ответ: $\{(mk(m+n), nk(m+n)) : m, n, k \in N\}$.

66. 1-й способ.

Имеем $5x^2 + 5y^2 - 8xy = 5 \Leftrightarrow (x-2y)^2 + (y-2x)^2 = 5 = 1^2 + 2^2$, значит $\begin{cases} x - 2y = \pm 1; \pm 2; \pm 1; \pm 2 \\ y - 2x = \pm 2; \pm 1; \mp 2; \mp 1 \end{cases}$, откуда $(x, y) = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$.

2-й способ.

Если $x = 0$, то $y = \pm 1$.

Если $y = 0$, то $x = \pm 1$.

Предположим, $x \neq 0$, $y \neq 0$, тогда $|x| \geq 1$, $|y| \geq 1$, значит $5(x^2 + y^2 - 1) > 0$, следовательно, $8xy > 0$, т.е. $xy > 0$.

Имеем $8xy = 5(x^2 + y^2 - 1) \geq 5(2xy - 1) \Rightarrow 8xy \geq 10xy - 5 \Leftrightarrow xy \leq 2{,}5$, причем $xy > 0$, значит $xy = 1$ или $xy = 2$.

Если $xy = 1$, то $x = y = \pm 1$, что невозможно.

Если $xy = 2$, то $x = \pm 1$, $y = \pm 2$ или $x = \pm 2$, $y = \pm 1$, что невозможно.

Ответ: $\{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$.

67. 1-й способ.

Имеем $x^2 - x(y+1) + y^2 - y = 0$.

Решим данное уравнение относительно переменной $x$, получим $D = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1$. Так как $D \geq 0$, то $3(y-1)^2 \leq 4 \Rightarrow (y-1)^2 < 2 \Leftrightarrow |y-1| < 2 \Leftrightarrow |y-1| \leq 1$, т.е. $y = 0; 1; 2$, следовательно, получаем следующие решения:

$(x, y) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

2-й способ.

Имеем $x+y=x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}\left((x-2y)^2+3x^2\right)\geq 0$, т.е. $x+y\geq 0$.

Предположим, $x<0$, т.е. $x\leq -1$, тогда $y>x+y=x^2+(-x)y+y^2\geq 1+1\cdot y+y^2 \Rightarrow$ $y>1+y+y^2 \Leftrightarrow$ $y^2+1<0$, что невозможно.

Итак, $x\geq 0$. Аналогично $y\geq 0$

Если $x=0$, то $y=0$ или $y=1$. Если $y=0$, то $x=0$ или $x=1$. Пусть $x\geq 1$, $y\geq 1$. Если $x=y$, тогда $x=y=0$ или $x=y=2$. Пусть $x\neq y$. Примем для определенности $x>y$, т.е. $x\geq y+1$, тогда, согласно условию, $x(x-y-1)+y(y-1)=0$, следовательно, $\begin{cases} x-y-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x=2$, $y=1$. Аналогично $x=1$, $y=2$.

3-й способ.

Заметим, что $x+y\geq 0$ (см. 2-й способ).

Имеем $x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow$ $(x+y)^2\geq 4xy \Leftrightarrow$ $\frac{3}{4}(x+y)^2\geq 3xy \Leftrightarrow$ $-3xy\geq -\frac{3}{4}(x+y)^2$, значит $x+y=x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy\geq$ $\geq\frac{1}{4}(x+y)^2$, т.е. $x+y\geq\frac{1}{4}(x+y)^2$, причем $x+y\geq 0$, значит $x+y\leq 4$, т.е. $x+y=0;1;2;3;4$, тогда $y=-x;-x+1;-x+2;$ $-x+3;-x+4$.

При подстановке значений $y$ в исходное уравнение получим следующие решения: $(x,y)=\{(0,0),(0,1),(1,0),(2,2)\}$.

68. 1-й способ.

Имеем $4x^2+4xy+4y^2=4x^2y^2 \Leftrightarrow$

$4x^2+8xy+4y^2=4x^2y^2+4xy \Leftrightarrow (2x+2y)^2=(2xy+1)^2-1 \Leftrightarrow$

$(2xy+1-2x-2y)(2xy+1+2x+2y)=1$, значит

$\begin{cases} 2xy+1-(2x+2y)=\pm 1 \\ 2xy+1+(2x+2y)=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2xy+1=\pm 1 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} xy=-1 \\ x=-y \end{cases}$ или $\begin{cases} xy=0 \\ x=-y \end{cases}$, т.е. $(x,y)=\{(0,0),(1,-1),(-1,1)\}$.

2-й способ.

Если $x=0$, то $y=0$; если $y=0$, то $x=0$; если $x=\pm1$, то $y=\mp1$; если $y=\pm1$, то $x=\mp1$. Предположим, $|x|\ge 2$, $|y|\ge 2$, тогда $x^2y^2\ge 4x^2$, $x^2y^2\ge 4y^2$, $x^2y^2\ge 4|xy|\ge 4xy$, значит $3x^2y^2=$ $=x^2y^2+x^2y^2+x^2y^2\ge 4x^2+4y^2+4xy=4(x^2+y^2+xy)=$ $=4x^2y^2 \Rightarrow 3x^2y^2\ge 4x^2y^2 \Rightarrow xy=0$, что невозможно, так как $|x|\ge 2$, $|y\ge 2|$.

3-й способ.

Если $x=0$, то $y=0$. Пусть $x\ne 0$.

Имеем $y^2(x^2-1)-yx-x^2=0 \Leftrightarrow 4y^2(x^2-1)^2-4(y(x^2-1))x-$ $-4x^2(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (2y(x^2-1)-x)^2=x^2(4x^2-3) \Leftrightarrow (\frac{2y(x^2-1)}{x}-$ $-1)^2=4x^2-3$. Так как $t^2\in Z$, где $t=\frac{2y(x^2-1)}{x}-1$, $t\in Q$, то $t\in Z$. Имеем $t^2=4x^2-3 \Leftrightarrow (2x-t)(2x+t)=3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2x-t=\pm3;\pm1\\ 2x+t=\pm1;\pm3\end{cases} \Rightarrow x=\pm1 \Rightarrow (x,y)=\{(0,0),(1,-1),(-1,1)\}.$$

4-й способ.

Если $x=0$, то $y=0$; если $x=1$, то $y=-1$; если $x=-1$, то $y=1$; если $y=0$, то $x=0$; если $y=1$, то $x=-1$; если $y=-1$, то $x=1$.

Предположим, $|x|\ge 2$, $|y|\ge 2$, тогда $|xy|\ge 4$.

Имеем $x^2+xy+y^2=x^2y^2 \Leftrightarrow (x+y)^2=xy(xy+1)$.

Если $xy>0$, то $(xy)^2<xy(xy+1)<(xy+1)^2 \Rightarrow$ $(xy)^2<(x+y)^2<(xy+1)^2 \Leftrightarrow xy<|x+y|<xy+1$, что невозможно.

Если $xy<0$, то $xy\le -4$ (так как $|xy|\ge 4$), тогда $(xy+1)^2<xy(xy+1)<(xy)^2$, значит $(xy+1)^2<(x+y)^2<(xy)^2 \Leftrightarrow$ $-xy-1<|x+y|<-xy$, что невозможно.

Ответ: $\{(0,0),(1,-1),(-1,1)\}$.

69. Имеем $5(x+y)^3=54(x+y)^2-108xy \Leftrightarrow$

$$xy=\frac{(x+y)^2(54-5(x+y))}{108}. \qquad (1)$$

Так как $x>0$, $y>0$, то $54-5(x+y)>0 \Leftrightarrow x+y<10{,}8$, т.е. $x+y\le 10$.

При подстановке $x+y=2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10$ в (1) получаем, что $xy$ не является целым, что невозможно. Если $x+y=6$, то $xy=8$, т.е. $(x,y)=\{(2,4),(4,2)\}$.

Ответ: $\{(2,4),(4,2)\}$.

70. 1) 1-й способ.

Пусть $a$, $b$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in Q$.

Пусть $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$, где $c\in Q$.

Если $a=b$, то $\sqrt{a}=\sqrt{b}=\frac{c}{2}\in Q$. Пусть $a\ne b$. Имеем $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{c}$, тогда $\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right)=$ $=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a-b}{c}\right)\in Q$.

Аналогично $\sqrt{b}\in Q$.

Если $a, b, \sqrt{a}+\sqrt{b}\in Z$, то $a, b, \sqrt{a}+\sqrt{b}\in Q$, тогда $\sqrt{a}, \sqrt{b}\in Q$, причем $a, b\in Z$, значит $\sqrt{a}, \sqrt{b}\in Z$.

2-й способ.

Пусть $a, b, c=\sqrt{a}+\sqrt{b}\in Q$, тогда $a=\left(c-\sqrt{b}\right)^2=c^2+b-$ $-2c\sqrt{b}\Rightarrow \sqrt{b}=\frac{c^2+b-a}{2c}\in Q$.

Аналогично $\sqrt{a}\in Q$.

2) Пусть $a, b, c, \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\in Q$.

Пусть $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=d$, где $d\in Q$.

Имеем $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(d-\sqrt{c}\right)^2 \Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}=d^2+c-$ $-2d\sqrt{c}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{d^2}}+\sqrt{c}=\frac{d^2+c-a-b}{2d}$. Так как

$\frac{ab}{d^2}, c, \sqrt{\frac{ab}{d^2}}+\sqrt{c}\in Q$, то $\sqrt{c}\in Q$ (см. пред. пункт). Аналогично $\sqrt{a}, \sqrt{b}\in Q$.

Если $a, b, c, \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\in Z$, то $a, b, c, \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\in Q$, тогда $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\in Q$, причем $a, b, c\in Z$, значит $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\in Z$.

3) Пусть $a, b, \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=c\in Q$, тогда $a=\left(c-\sqrt[3]{b}\right)^3 \Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{b^2}-c\sqrt[3]{b}=d$, где $d=\frac{-c^3+b+a}{3c}$, $d\in Q$, значит $d\sqrt[3]{b}=b-c\sqrt[3]{b^2}$, т.е.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{b^2}-c\sqrt[3]{b}=d. & (1)\\ c\sqrt[3]{b^2}+d\sqrt[3]{b}=b. & (2)\end{cases}$$

Умножим равенство (1) на $c$ и вычтем из полученного соотношения равенство (2), получим $\left(d+c^2\right)\sqrt[3]{b}=b-cd$. **(3)**

Если $d+c^2\neq 0$, то $\sqrt[3]{b}\in Q$, значит $\sqrt[3]{a}=c-\sqrt[3]{b}\in Q$.

Если $d+c^2=0$, то $\sqrt[3]{b^2}-c\sqrt[3]{b}=-c^2 \Leftrightarrow$ $\left(\sqrt[3]{b}-2c\right)^2+3\left(\sqrt[3]{b}\right)^2=0 \Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{b}=0$, $c=0$, значит $a=0$, т.е. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}=0\in Q$.

Если $a, b, \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\in Z$, то $a, b, \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\in Q$, значит $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}\in Q$, причем $a, b\in Z$, следовательно, $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}\in Z$.

71. 1) Имеем $\sqrt{1999x}+\sqrt{1999y}=1999$.

Пусть $a=1999x$, $b=1999y$, тогда $a, b, \sqrt{a}+\sqrt{b}$ являются целыми числами, значит, согласно № 70, $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ являются целыми, т.е. $\sqrt{a}=c$, $\sqrt{b}=d$, где $c, d\in N$, тогда $1999x=c^2$, $1999y=d^2$. Так как простое 1999 делит $c^2, d^2$, то 1999 делит числа $c$, $d$, т.е. $c=1999m$, $d=1999n$, где $m, n\in N$, тогда $x=1999m^2$, $y=1999n^2$, следовательно, $\sqrt{1999m^2}+\sqrt{1999n^2}=$ $=\sqrt{1999} \Leftrightarrow m+n=1$, что невозможно, ибо $m\geq 1$, $n\geq 1$.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2) Имеем $\sqrt[3]{1999^2 x}+\sqrt[3]{1999^2 y}=1999$.

Пусть $a=1999^2 x$, $b=1999^2 y$, тогда $a, b, \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ являются целыми, значит, согласно № 70, $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[3]{b}$ являются целыми, т.е. $\sqrt[3]{a}=c$, $\sqrt[3]{b}=d$, где $c, d \in N$, тогда $1999^2 x=c^3$, $1999^2 y=d^3$.

Так как простое 1999 делит $c^3, d^3$, то 1999 делит $c$, $d$, т.е. $c=1999m$, $d=1999n$, где $m, n \in N$, тогда $x=1999m^3$, $y=1999n^3$, значит, согласно условию, $\sqrt[3]{1999m^3}+\sqrt[3]{1999n^3}=$ $=\sqrt[3]{1999} \Leftrightarrow m+n=1$, что невозможно, ибо $m \geq 1$, $n \geq 1$.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

72. 1) Пусть $n=m^2 k$, где $m, k \in N$, $m>1$, тогда пара чисел $(x, y)=\left((m-1)^2 k, k\right)$ удовлетворяет условию, так как $\sqrt{x}+\sqrt{y}=(m-1)\sqrt{k}+\sqrt{k}=m\sqrt{k}=\sqrt{m^2 k}=n$.

Обратно, пусть уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$ разрешимо в натуральных числах. Покажем, что найдется $m$ $(m \in N, m>1)$ такое, что $m^2$ делит $n$. Предположим, такого $m$ не существует, тогда $n=p_1 p_2 \ldots p_l$, где $p_i$ различные простые числа. Имеем $\sqrt{nx}+\sqrt{ny}=n$.

Пусть $a=nx$, $b=ny$.

Так как $a, b, \sqrt{a}+\sqrt{b}$ являются целыми, то, согласно № 70, $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ являются целыми, т.е. $\sqrt{a}=c$, $\sqrt{b}=d$, где $c, d \in N$, тогда $nx=c^2$, $ny=d^2$, следовательно, простые числа $p_1, \ldots, p_l$ делят $c^2, d^2$, значит $p_1, \ldots, p_l$ делят $c$, $d$, т.е. $c=p_1 \ldots p_l m$, $d=p_1 \ldots p_l k$, где $m, k \in N$, значит $c=mn$, $d=nk$, тогда $x=nm^2$, $y=nk^2$, согласно условию, имеем $\sqrt{nm^2}+\sqrt{nk^2}=\sqrt{n} \Leftrightarrow m+k=1$, что невозможно, ибо $m \geq 1$, $k \geq 1$.

Получено противоречие, что и требовалось доказать.

2) Если $n=m^3 k$, где $m, k \in N$, $m>1$, тогда пара чисел $x=(m-1)^3 k$, $y=k$ удовлетворяет условию, так как

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=(m-1)\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}=m\sqrt[3]{k}=\sqrt[3]{m^3k}=\sqrt[3]{n}.$$

Обратно, пусть уравнение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{n}$ разрешимо в натуральных числах. Покажем, что существует $m$ $(m\in N, m>1)$ такое , что $m^3$ делит $n$. Предположим, такого $m$ не существует, тогда $n=(p_1...p_l)(q_1{}^2...q_s{}^2)$, где $p_1, ..., q_s$ различные простые числа.

Имеем $\sqrt[3]{n^2x}+\sqrt[3]{n^2y}=n$. Пусть $a=n^2x$, $b=n^2y$. Так как $a, b, \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ являются целыми, то, согласно № 70, $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}$ являются целыми, т.е. $\sqrt[3]{a}=c$, $\sqrt[3]{b}=d$, где $c, d\in N$, тогда $nx=c^3$, $ny=d^3$, значит простые числа $p_1, ..., q_s$ делят $c^3, d^3$, следовательно, $c=(p_1...q_s)m$, $d=(p_1...q_s)k$, где $m, k\in N$, тогда $x=(p_1^2...p_l^2)(q_1...q_s)m^3$, $y=(p_1{}^2...p_l{}^2)(q_1...q_s)k^3$. Пусть $p_1...p_l=p$, $q_1...q_s=q$, тогда $x=p^2qm^3$, $y=p^2qk^3$, $n=pq^2$. Согласно условию, имеем $\sqrt[3]{p^2qm^3}+\sqrt[3]{p^2qk^3}=\sqrt[3]{pq^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{p}(m+k)=\sqrt[3]{q} \Leftrightarrow$ $\frac{q}{p}=(m+k)^3$, что невозможно, так как $p_1, ..., p_l$, $q_1, ..., q_s$ различные простые числа.

Получено противоречие, что и требовалось доказать.

73. Пусть $x^2+1999=a$, $y^2+1999=b$, тогда $a, b, \sqrt{a}+\sqrt{b}$ являются целыми числами, значит $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ являются целыми, т.е. $\sqrt{a}=c$, $\sqrt{b}=d$, где $c, d\in N$.

Имеем $x^2+1999=c^2$, $y^2+1999=d^2$, $c+d=1999$. Так как $c+d=1999$, то $c$, $d$ различной четности. Пусть для определенности $c$ нечетное число, т.е. $c=2n+1$, тогда $x$ четное число, т.е. $x=2m$, значит $(2m)^2+1999=(2n+1)^2$, $n^2+n-m^2=\frac{999}{2}$, что невозможно, что и требовалось доказать.

74. Заметим, что справедливо следующее тождество $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2-c^2-ab-bc-ac)$, значит,

если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$. Так как $(x-y)+(y-z)+$ $+(z-x)=0$, то, согласно условию, имеем $3(x-y)(y-z)(z-x)=30 \Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)=10=1\cdot2\cdot5=$ $=(-1)(-2)5=(-1)2(-5)=1(-2)(-5)$.

Так как $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$, а число 10 непредставимо в виде произведения трех целых чисел, сумма которых равна нулю, то исходное уравнение неразрешимо в целых числах.

75. Пусть $s$, $t$ корни исходного уравнения. Согласно теореме Виета, $\begin{cases} s+t=-2a-1 \\ st=b+1 \end{cases}$ $(2a+1)^2+b^2=(s+t)^2+(st-1)^2=$ $s^2t^2+s^2+t^2+1=(s^2+1)(t^2+1)$, причем согласно условию, $(2a+1)^2+b^2$ простое, значит $s^2+1=1$ или $t^2+1=1$, т.е. $s=0$ или $t=0$, тогда $st=0$, $b+1=0$, $b=-1$.

$(2a+1)^2+b^2=2(2a^2+2a+1)$ – простое, значит $2a^2+2a+1=\pm1$, однако $2a^2+2a+1=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$, следовательно, $2a^2+2a+1= =1 \Leftrightarrow a=0$ или $a=-1$.

Если $a=0$, $b=-1$, то $s=0$, $t=-1$.

Если $a=b=-1$, то $s=0$, $t=1$.

Ответ: $\{(a,b)=(0,-1),(-1,-1)\}$.

76. 1-й способ.

Очевидно, $z\ge2$.

Имеем $x<z$, $y<z$, значит $x\le z-1$, $y\le z-1$, тогда $x!+y!\le 2(z-1)!$, т.е. $z!\le 2(z-1)! \Leftrightarrow$ $z(z-1)!\le 2(z-1)! \Leftrightarrow$ $z\le2$. Итак, $z=2$, тогда $x!+y!=2$, значит $x=y=1$.

2-й способ.

Пусть для определенности $x\le y<z$.

Предположим, $x<y$, тогда $x!+y!=z! \Leftrightarrow$ $x!+x!(x+1)\ldots y=x!(x+1)\ldots z \Leftrightarrow$ $1+(x+1)\ldots y=(x+1)\ldots z$, значит $x+1$ делит 1, что невозможно, ибо $x+1>1$. Итак, $x=y<z$. Имеем $2x!=z! \Leftrightarrow$ $2x!=x!(x+1)\ldots z \Leftrightarrow$ $2=(x+1)\ldots z$, значит $x+1$ делит 2, тогда $2\ge x+1$, $x\le1$, т.е. $x=1$. Итак, $x=y=1$, $z=2$.

Ответ: $\{1,1,2\}$.

77. Если $x=1$, то $y=1$. Пусть $x \geq 2$.

Так как $y \geq 1$, то $x^{xy-x^y} \geq 1$, причем $x \geq 1$, значит $xy-x^y \geq 0 \Leftrightarrow$ $x^{y-1} \leq y$. **(1)**

Имеем $y \geq x^{y-1} \geq 2^{y-1}$, т.е. $2^{y-1} \leq y$, однако $2^{y-1} > y$ при любом $y > 2$. Итак, $y=1$ или $y=2$.

Если $y=1$, то $x$ любое натуральное число.

Если $y=2$, то из (1) $x \leq 2$, т.е. $x=2$, однако $x=y=2$ не удовлетворяет условию.

Ответ: $\{(n;1): n \in N\}$.

78. 1) 1-й способ.

Очевидно, $n \geq 2$.

Имеем $x<z$, $y<z$, значит $x \leq z-1$, $y \leq z-1$, тогда $n^z = n^x + n^y \leq n^{z-1} + n^{z-1} = 2n^{z-1}$, отсюда $n \leq 2$, следовательно, $n=2$.

Имеем $2^x + 2^y = 2^z$.

Пусть для определенности $x \leq y$, тогда $1+2^{y-x} = 2^{z-x}$.

Если $y-x>0$, то левая часть последнего равенства является нечетным числом, правая – четным, что невозможно, значит $x=y$, тогда $2^{z-x}=2$, $z-x=1$. Итак, $x=y=k$, $z=k+1$, $n=2$, где $k \in N$.

2-й способ.

Пусть для определенности $x \leq y < z$.

Имеем $n^x + n^y = n^z \Leftrightarrow$ $1+n^{y-x} = n^{z-x} \Leftrightarrow$ $n^{y-x}(n^{z-y}-1)=1$. Очевидно, $n \neq 1$.

Имеем $n^{y-x}=1$, $n^{z-y}-1=1 \Leftrightarrow$ . $n^{y-x}=1$, $n^{z-y}=2$, значит $x-y=0$, $z-y=1$, $n=2$, т.е. $n=2$, $x=y=k$, $z=k+1$, где $k \in N$.

Ответ: $\{n=2, (x,y,z)=(k,k,k+1): k \in N\}$.

2) 1-й способ.

Очевидно, $n \neq 1$.

Из условия заключаем, $x<t$, $y<t$, $z<t$, значит $x \leq t-1$, $y \leq t-1$, $t \leq t-1$, тогда $n^t = n^x + n^y + n^z \leq 3n^{t-1}$, отсюда $n \leq 3$, т.е. $n=2$ или $n=3$.

Пусть для определенности $x \le y \le z < t$, тогда

$$1+n^{y-x}+n^{z-x}=n^{t-x}. \qquad (1)$$

Если $x \ne y$, то из (1) $n^{y-x}\left(n^{t-y}-n^{z-y}-1\right)=1$, значит $n$ делит 1, что невозможно, ибо $n \ge 2$. Итак, $x=y$, тогда $x=y$, значит $n^{t-y}-n^{z-y}=2 \Leftrightarrow n^{z-y}\left(n^{t-y}-1\right)=2$.

Если $n=2$, то $2^{z-y}\left(2^{t-z}-1\right)=2 \Leftrightarrow 2^{z-y}=2$, $2^{t-z}-1=1 \Leftrightarrow z-y=1$, $t-z=1$ т.е. $n=2$, $x=y$, $z=x+1$, $t=x+2$.

Если $n=3$, то $3^{z-y}\left(3^{t-z}-1\right)=2 \Leftrightarrow 3^{z-y}=1$, $3^{t-z}-1=2 \Leftrightarrow z=y$, $t=z+1$, т.е. $n=3$, $x=y=z$, $t=z+1$.

2-й способ.

Очевидно, $n \ne 1$.

Пусть для определенности $x \le y \le z < t$, тогда $1+n^{y-x}+n^{z-x}=n^{t-x} \Leftrightarrow n^{y-x}\left(n^{t-y}-n^{z-y}-1\right)=1$.

Если $y-x>0$, тогда получаем, что $n$ делит 1, что невозможно. Итак, $x=y$, тогда $n^{z-y}\left(n^{t-z}-1\right)=2 \Leftrightarrow n^{z-y}=2$, $n^{t-z}-1=1$ или $n^{z-y}=1$, $n^{t-z}-1=2 \Leftrightarrow n=2$, $z-y=1$, $t-z=1$ или $n=3$, $z=y$, $t-z=1$.

Ответ: если $n>3$ или $n=1$, то 0;

$n=2:\{(k, k, k+1, k+2), (k, k+1, k, k+2), (k+1, k, k, k+2)\}$;

$n=3:\{(k, k, k, k+1)\}$, где $k \in N$.

79. Покажем, что $\varphi(n)$ делит $n!$, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера. Если $n=1$, тогда $\varphi(n)=1$.

Пусть $n>1$, тогда $n=p_1^{k_1}\dots p_m^{k_m}$, где $p_i$ различные простые числа, тогда $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$, значит

$$A=\frac{n!}{\varphi(n)}=\frac{(n-1)!n}{\varphi(n)}=\frac{(n-1)!p_1\dots p_m}{(p_1-1)\dots(p_m-1)}.$$

Так как $p_i \le n$, то $p_i-1 \le n-1$.

Пусть для определенности $p_1<\dots<p_m$, тогда $p_1-1<\dots<p_m-1 \le n-1$, т.е. числа $p_i-1$ являются различными натуральными числами, меньшими $n-1$, значит $(p_1-1)\dots(p_m-1)$

делит $1\cdot 2\dots(n-1)=(n-1)!$, следовательно, число $A$ является натуральным, т.е. $\varphi(n)$ делит $n!$

Согласно теореме Эйлера, $n$ делит $2^{\varphi(n)}-1$, причем $2^{\varphi(n)}-1$ делит $\left(2^{\varphi(n)}\right)^A-1=2^{n!}-1$, следовательно, $n$ делит $2^{n!}-1$, что и требовалось доказать.

80. Предположим, $x+y\sqrt{z}=\sqrt[3]{1999}$, где $x,y,z\in Q$, $z\geq 0$, тогда $y^2z=\left(\sqrt[3]{1999}-x\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1999^2}-2x\sqrt[3]{1999}+t=0$, **(1)**

где $t=x^2-y^2z$, $t\in Q$.

Умножим равенство (1) на $\sqrt[3]{1999}$, получим $1999-2x\sqrt[3]{1999^2}+t\sqrt[3]{1999}=0$. **(2)**

Умножим равенство (1) на $2x$ и к полученному равенству прибавим равенство (2), получим $\left(t-4x^2\right)\sqrt[3]{1999}=-2tx-1999$. Если коэффициент при $\sqrt[3]{1999}$ не равен нулю, то $\sqrt[3]{1999}$ является рациональным числом, что невозможно. Итак, $t-4x^2=0 \Leftrightarrow$ $3x^2+y^2z=0$, где $z\geq 0$, значит $x^2=0$, $y^2z=0$, тогда $x+y\sqrt{z}=0$, что невозможно, что и требовалось доказать.

81. 1) Составим разность уравнений системы, получим $x^3-y^3-\left(x^2-y^2\right)=y-x \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y+1\right)=0$, значит $x=y$ или $x^2+xy+y^2-x-y+1=0$.

Если $x=y$, то $x^3-x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow$ $x=2$, т.е. $x=y=2$.

Если $x^2+xy+y^2-x-y+1=0$, то $(x+y)^2+(x-1)^2+$ $+(y-1)^2=0 \Leftrightarrow x+y=0$, $x-1=0$, $y-1=0$, что невозможно.

Ответ: $\{(2,2)\}$.

2) Если $x=y$, тогда $x=y=2$ (см. пред. пункт), тогда $z=y^3-y^2-2=2$, т.е. $x=y=z=2$.

Предположим, $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$.

Составим попарные разности уравнений системы, получим

$$\begin{cases} x^3-y^3-\left(x^2-y^2\right)=y-z \\ y^3-z^3-\left(y^2-z^2\right)=z-x \\ z^3-x^3-\left(z^2-x^2\right)=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y\right)=y-z \\ (y-z)\left(y^2+yz+z^2-y-z\right)=z-x \\ (z-x)\left(x^2+zx+x^2-z-x\right)=x-y \end{cases},$$

следовательно, $x-y$ делит $y-z$, $y-z$ делит $z-x$, $z-x$ делит $x-y$, т.е. $y-z=a(x-y)$, $z-x=b(y-z)$, $x-y=c(z-x)$, значит $x-y=c(z-x)=bc(y-z)=abc(x-y)$, т.е. $abc=1$, ибо $x-y\neq 0$, тогда $a=\pm 1$, $b=\pm 1$, $c=\pm 1$.

Если $a=-1$, то $y-z=-(x-y)$, $x=z$, что противоречит предположению.

Аналогично $b\neq -1$, $c\neq -1$, следовательно, $a=b=c=1$, тогда

$$\begin{cases} x-y=y-z \\ y-z=z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-z \\ x+y=2z \end{cases} \Rightarrow (x+y)-(x-2y)=2z-(-z)\Leftrightarrow$$

$y=z$, что невозможно.

Ответ: $\{(2,2,2)\}$.

82. 1-й способ.

Корни исходного уравнения равны $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Предположим, корни уравнения являются рациональными числами, тогда $b^2-4ac=d^2$, где $d\in Z$.

Так как $b$ нечетно, то и $d$ нечетно.

Имеем $(2m+1)^2-4(2k+1)(2l+1)=(2n+1)^2 \Leftrightarrow m(m+1)-$ $-n(n+1)-4kl-2k-2l=1$, что невозможно, ибо слева – четное число, справа – нечетное число. Получено противоречие, что и требовалось доказать.

2-й способ.

Предположим, исходное уравнение имеет рациональный корень $x=\dfrac{m}{n}$ $(n\neq 0)$, где $(m,n)=1$. Так как $c$ нечетно, то $x\neq 0$, т.е. $m\neq 0$. Так как $(m,n)=1$, то хотя бы одно из чисел $m$, $n$ нечетно. Пусть для определенности $m$ нечетно. Имеем $ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow$ $am^2+bmn+cn^2=0$. Однако, если $m$, $n$ нечетные числа, то $am^2+bmn+cn^2$ также нечетно, что невозможно. Если $m$ нечетно, $n$ четно, тогда $am^2+bmn+cn^2$ также нечетно, что невозможно.

2) Предположим, исходное уравнение имеет рациональный корень $x=\frac{m}{n}$, где $(m,n)=1$, $n\neq 0$.

Так как $e$ нечетно, то $x\neq 0$, т.е. $m\neq 0$.

Так как $(m,n)=1$, то хотя бы одно из чисел $m$, $n$ является нечетным. Имеем $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \Leftrightarrow am^4+bm^3n+$ $+cm^2n^2+dmn^3+en^4=0$. Пусть для определенности $m$ нечетно. Если $m$, $n$ нечетны, тогда $am^4+bm^3n+cm^2n^2+dmn^3+en^4$ нечетно, что невозможно. Аналогично, если $m$ нечетно, $n$ четно, также получаем противоречие.

83. Имеем $(x-y)(x^{p-1}+x^{p-2}y+\ldots+y^{p-1})=c$, причем $c$ простое, значит $x-y=1$, тогда $(y+1)^p-y^p=c \Leftrightarrow (y^p+C_p^{\,1}y^{p-1}+\ldots+$ $+C_p^{\,p-1}y+1)-y^p=2^{2^n}+1 \Leftrightarrow \ pm=2^{2^n}$, где $m\in N$. **(1)**

Действительно, покажем, что $C_p^{\,k}$ делится на $p$, где $1\le k\le p-1$, $p$ простое. Имеем $C_p^{\,k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{p(p-1)!}{k!(p-k)!}$.

Так как $1\le k\le p-1$, то $1\le p-k\le p-1$, значит $p$ взаимно просто с числами $k!$, $(p-k)!$, тогда $C_p^{\,k}$ делится на $p$.

Из (1) заключаем, $p$ делит $2^{2^n}$, значит $p=2$, ибо $p$ простое. Таким образом, $(y+1)^2-y^2=c \Leftrightarrow \quad y=\frac{c-1}{2}$, значит $x=y+1=\frac{c+1}{2}$.

Ответ: $\left\{(a,b,p)=\left(\frac{c+1}{2},\frac{c-1}{2},2\right)\right\}$.

84. Пусть $x=n+\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, тогда $(\cos n+\sin(n+1))^2=$ $=(\cos(x-y)+\sin(x+y))^2=(\cos x\cos y+\sin x\sin y+\sin x\cos y+$ $+\sin y\cos x)^2=((\cos x+\sin x)(\cos y+\sin y))^2=(\cos x+\sin x)^2\cdot$ $\cdot(\cos y+\sin y)^2=(1+\sin 2x)(1+\sin 2y)=(1+\sin(2n+1))(1+\sin 1)$, следовательно, $(\cos 1+\sin 2)^2\ldots(\cos n+\sin(n+1))^2=(1+\sin 1)^n\cdot$

$\cdot(1+\sin 3)\ldots(1+\sin(2n+1))$, тогда с учетом условия имеем $n=1999$.

Ответ: $\{1999\}$.

85. Пусть $x+y+\dfrac{1}{xy}=a$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+xy=b$, $x=\dfrac{m}{n}$, $y=\dfrac{k}{l}$, где $a, b, m, n, k, l \in Z$, $(m, n)=1$, $(k, l)=1$, $n\neq 0$, $l\neq 0$, тогда $a=\dfrac{m^2kl+mk^2n+n^2l^2}{mnkl}$, $b=\dfrac{n^2kl+l^2mn+m^2k^2}{mnkl}$.

Так как $a$, $b$, $k$, $l$ целые числа, то $ak-bl$ также целое, причем

$$ak-bl=\frac{k^3-l^3}{kl}. \qquad (1)$$

Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $k^3-l^3$, $kl$.

Так как $p$ делит $kl$, то $p$ делит $k$ или $p$ делит $l$.Пусть для определенности $p$ делит $k$, тогда $p$ делит $k^3-(k^3-l^3)=l^3$, значит $p$ делит $l$, т.е. $p$ делит числа $k$, $l$, что невозможно, ибо $(k,l)=1$. Итак, $k^3-l^3$ и $kl$ взаимно просты, значит, согласно (1), заключаем $kl=\pm 1$, т.е. $k=\pm 1$, $l=\pm 1$, тогда $y=\dfrac{k}{l}=\pm 1$.

Аналогично $x=\pm 1$.

Ответ: $\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$.

86. 1) 1-й способ.

Имеем $2x^2+2xy+2y^2+2x+2y=10 \Leftrightarrow (x+y)^2+(x+1)^2+$ $+(y+1)^2=12 \Rightarrow (x+1)^2\leq 12$, $(y+1)^2\leq 12 \Rightarrow |x+1|\leq 3$, $|y+1|\leq 3 \Rightarrow x, y=-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$.

При подстановке данных значений в исходное равенство находим следующие решения: $\{(1,1),(1,-3),(-3,1)\}$.

2-й способ.

Заметим, $(1,1)$ является решением. Пусть $x=1+a$, $y=1+b$, где $a$, $b$ целые числа.

Имеем $(1+a)^2+(1+a)(1+b)+(1+b)^2+(1+a)+(1+b)-5=0 \Leftrightarrow$

$$a^2+b^2+ab+4a+4b=0. \qquad (1)$$

Если $b=0$, т.е. $y=1$, тогда $x=1$ или $x=-3$.

Пусть $b \neq 0$, пусть $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$, где $(m, n) = 1$, $n \neq 0$, тогда с учетом (1) имеем $a = -\dfrac{4m(m+n)}{m^2+mn+n^2}$, $b = -\dfrac{4n(m+n)}{m^2+mn+n^2}$. (2)

Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $m(m+n)$, $m^2+mn+n^2$, тогда $p$ делит $(m^2+mn+n^2) - m(m+n) = n^2$, значит $p$ делит $n$, тогда $p$ делит $m(n+m) - nm = m^2$, т.е. $p$ делит $m$, что невозможно, ибо $(n, m) = 1$. Итак, числа $m(m+n)$ и $m^2+mn+n^2$ взаимно просты. Аналогично $n(m+n)$ и $m^2+mn+n^2$ взаимно просты, таким образом, из (2) заключаем, что $m^2+mn+n^2$ делит 4, т.е. $m^2+mn+n^2 = 1; 2; 4$, ибо $m^2+mn+n^2 = \left(\dfrac{m}{2}+n\right)^2 + \dfrac{3}{4}m^2 > 0$.

Если $m^2+mn+n^2 = 1$, тогда $(2m+n)^2 + 3n^2 = 4 \Rightarrow 3n^2 \leq 4$, т.е. $n = \pm 1$ $(n \neq 0)$, следовательно, $m = \pm 1$, значит $a = b = 0$, $x = y = 1$.

Если $m^2+mn+n^2 = 2$, то $(m+2n)^2 + 3n^2 = 8 \Rightarrow 3n^2 \leq 8$, значит $n = \pm 1$ $(n \neq 0)$, тогда $(m \pm 2)^2 = 5$, что невозможно.

Если $m^2+mn+n^2 = 4$, то $(m+2n)^2 + 3m^2 = 16 \Rightarrow 3m^2 \leq 16 \Rightarrow$ $m = 0; \pm 1; \pm 2$, тогда $m^2 = 16$ или $(m \pm 2)^2 = 13$ или $(m \pm 4)^2 = 4$, следовательно, если $m = 0$, то $n = \pm 2$, $a = 0$, $b = 4$, $x = 1$, $y = -3$; если $m = \pm 2$, то $n = \mp 2$, $a = b = 0$, $x = y = 1$; если $m = \pm 1$, то $\{\varnothing\}$.

Ответ: $\{(1, 1), (1, -3), (-3, 1)\}$.

2) Заметим, что $(3, 1)$ является решением.

Пусть $x = 3 + a$, $y = 1 + b$, где $a$, $b$ целые числа, тогда при подстановке данных $x, y$ в исходное уравнение, получим $a^2 - ab + b^2 + 4a + 2b = 0$. (3)

Если $b = 0$, т.е. $y = 1$, тогда $x = 3$ или $x = -1$. Пусть $b \neq 0$ и пусть $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$, т.е. $a = \dfrac{m}{n}b$, где $(m, n) = 1$, $n \neq 0$, тогда с учетом (3) получим $a = \dfrac{-2m(2m+n)}{m^2-mn+n^2}$; $b = \dfrac{-2n(2m+n)}{m^2-mn+n^2}$.

Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $m$, $m^2+mn+n^2$, тогда $p$ делит $n^2=\left(m^2+mn+n^2\right)-m(m+n)$, значит, $p$ делит $n$, что невозможно, ибо $(m,n)=1$. Итак, $\left(m,m^2+mn+n^2\right)=1$. Аналогично $\left(n,m^2+mn+n^2\right)=1$.

Пусть $d=\left(2m+n,m^2-mn+n^2\right)$, тогда $\begin{cases}2m+n=dk\\ m^2-mn+n^2=dl\end{cases}$, где $k$, $l$ целые, значит $dl=m^2-m(dk-2m)+(dk-2m)^2 \Leftrightarrow d\left(l+5km-dk^2\right)=7m^2$, т.е. $d$ делит $7m^2$. Если некоторый простой делитель $q$ числа $d$ делит число $m$, тогда $q$ делит $m^2+mn+n^2$, что невозможно (см. выше). Итак, $\left(d,m^2\right)=1$, однако $d$ делит $7m^2$, значит $d$ делит 7, т.е. $d=1$ или $d=7$. Если $d=1$, тогда из (3) заключаем, что $m(2m+n)$ и $m^2-mn+n^2$ взаимно просты, следовательно, $m^2-mn+n^2$ делит 2, т.е. $m^2-mn+n^2=1;2$.

Если $d=7$, тогда $a=\dfrac{2m\dfrac{2m+n}{7}}{\dfrac{m^2-mn+n^2}{7}}$, причем $\left(m,\dfrac{m^2-mn+n^2}{7}\right)=1$, $\left(\dfrac{2m+n}{7},\dfrac{m^2-mn+n^2}{7}\right)=1$, следовательно, $\dfrac{m^2-mn+n^2}{7}$ делит 2, т.е. $\dfrac{m^2-mn+n^2}{7}=1;2 \Leftrightarrow$ $m^2-mn+n^2=7;14$. Если $m^2-mn+n^2=1$, то $(m-2n)^2+3m^2=4 \Rightarrow 3m^2\le 4$, значит $m=0;\pm1$.

Если $m=0$, то $n=\pm1$; если $m=\pm1$, то $n=0$ или $n=\pm1$. Таким образом, получаем следующие решения: $\{(3,-1),(-3,-5)\}$.

Если $m^2-mn+n^2=2$, то $\{\varnothing\}$ (см. пред. пункт).

Если $m^2-mn+n^2=7$, то $(m-2n)^2+3m^2=28 \Rightarrow 3m^2\le 28$, т.е. $m=0;\pm1;\pm2;\pm3$, тогда

$$(m,n)=\left\{\begin{matrix}(1,-2),(1,3),(-1,-3),(-1,2),(2,-1),(2,3),(-2,-3),\\ (-2,-1),(3,1),(3,2),(-3,-2),(-3,-1)\end{matrix}\right\},$$

следовательно, $(a,b)=\{(0,0),(-4,-6),(-6,-2)\}$,

$(x, y)=\{(3, 1), (-1, -5), (-3, -1)\}$.

Если $m^2-mn+n^2=14$, то $(m-2n)^2+3m^2=56$ **(4)**

$\Rightarrow 3m^2\le 56 \Leftrightarrow\ m=0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4$.

При подстановке данных значений $m$ в равенство (4) получаем противоречие.

Ответ: $\{(3, -1), (-3, -5), (-1, 1), (-3, -1), (-1, -5), (3, 1)\}$.

87. Если $x=1$, то $y, z$ любые натуральные числа. Пусть $x\ne 1$. Имеем $y^z\left(x^z-1\right)=x^{1999}-1$. Так как $x^z-1$ делит $x^{1999}-1$, то $x^z-1\le x^{1999}-1$, т.е. $z\le 1999$.

Если $z=1999$, то $y^{1999}=1$, т.е. $y=1$.

Пусть $z<1999$, пусть $1999=dz+r$, где $d, r\in Z$, $0\le r<z$, $0\le d$.

Предположим, $r>0$.

Имеем $x^z-1$ делит $x^{1999}-1=x^{dz+r}-1=x^r\left(x^{dz}-1\right)+\left(x^r-1\right)$, причем $x^z-1$ делит $\left(x^z\right)^d-1$, значит $x^z-1$ делит $x^r-1$, тогда $x^z-1\le x^r-1$, т.е. $z\le r$, что невозможно.

Итак, $r=0$, тогда $1999=dz$, причем $z<1999$, тогда $z=1$, значит $y(x-1)=x^{1999}-1$, $y=x^{1998}+\ldots+x+1$.

Ответ: если $x=1$, то $y, z$ любые натуральные числа; если $x>1$, то $\left\{(x, 1, 1999), \left(x, x^{1998}+\ldots+x+1, 1\right)\right\}$.

88. 1) Если $x=0$, то $y=0$. Предположим, $x>0$. Имеем $x+\sqrt{x+\sqrt{x}}=y^2$, тогда $\sqrt{x+\sqrt{x}}=y^2-x \Leftrightarrow\ x+\sqrt{x}=\left(y^2-x\right)^2$. Пусть $y^2-x=z$, $z\in Z$. Имеем $\sqrt{x}=z^2-x$. Пусть $z^2-x=t$, тогда $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, где $t\in N$. Имеем $t^2+t=z^2$ и так как $t^2<t^2+t<(t+1)^2$, то $t^2<z^2<(t+1)^2 \Leftrightarrow\ t<|z|<t+1$, что невозможно.

Ответ: $\{(0, 0)\}$.

2) Имеем $\sqrt[1999]{x+\sqrt[1999]{x}}=y^{1999}-x$, тогда $x+\sqrt[1999]{x}=z^{1999}$, где $z=y^{1999}-x$, $z\in Z$, следовательно, $x=\left(z^{1999}-x\right)^{1999}$.

Пусть $z^{1999}-x=t$, тогда $x=t^{1999}$, где $t\in Z$. Имеем

$t^{1999}+t=z^{1999} \Leftrightarrow \ t\left(t^{1998}+1\right)=z^{1999}$. **(1)**

Если $t=0$, то $z=0$, $x=z^{1999}-t=0$, $y=0$.

Пусть $t\neq 0$, тогда числа $t, t^{1998}+1$ взаимно просты, значит из (1) имеем $\begin{cases} t=a^{1999} \\ t^{1998}+1=b^{1999} \\ z=ab \end{cases}$, где $a, b \in Z$.

Имеем $\left(a^{1999}\right)^{1998}+1=b^{1999} \Leftrightarrow \ b^{1999}-c^{1999}=1$, где $c=a^{1998}$, $c\in Z$, $c\geq 0$, значит $b^{1999}=c^{1999}+1>0$, т.е. $b>0$.

Имеем $(b-c)\left(b^{1998}+b^{1997}c+\ldots+bc^{1997}+c^{1998}\right)=1$, значит $b-c=1$, т.е. $b=c+1$, тогда $(c+1)^{1999}-c^{1999}=1$, однако $(c+1)^{1999}-c^{1999}\geq 1+1999c$ для любого $c\geq 0$, значит $1\geq 1+1999c \Leftrightarrow c\leq 0$, однако, по определению, $c\geq 0$. Итак, $c=0$, $b=c+1=1$, $a^{1998}=c=0$, т.е. $a=0$, $z=ab=0$, $t\left(t^{1998}+1\right)=z^{1999}=0$, значит $t=0$, $x=z^{1999}-t=0$, $y=0$.

Ответ: $\{(0, 0)\}$.

89. Если $b=0$, то $a=0$ или $a=-1$, значит $|a+bc|=1^2$. Пусть $b\neq 0$.

Имеем $\left(a^2-b^2c^2\right)+(a+bc)=b \Leftrightarrow (a-bc+1)(a+bc)=b^2$. **(1)**

Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $(a-bc+1)$, $(a+bc)$, тогда из (1) $p$ делит $b^2$, т.е. $p$ делит $b$, тогда $p$ делит $a=(a+bc)-bc$, значит $p$ делит $1=(a-bc+1)-a+bc$, что невозможно. Итак, числа $a-bc+1$ и $a+bc$ взаимно просты, причем $|a-bc+1|\cdot|a+bc|=b^2$, значит $|a+bc|$ является полным квадратом.

90. 1) Имеем $\left(\sqrt{2x+\sqrt{3}}+\sqrt{2x-\sqrt{3}}\right)^2=6y \Leftrightarrow \ \left(2x+\sqrt{3}\right)+(2x-$ $-\sqrt{3})+2\sqrt{4x^2-3}=6y \Leftrightarrow \ \sqrt{4x^2-3}=3y-2x \Rightarrow \ 4x^2-3=$ $=(3y-2x)^2 \ \Leftrightarrow y(4x-3y)=1$.

И так как $x, y\in N$, то $y=1$, $4x-3y=1$, следовательно, $x=y=1$.

Ответ: $\{(1,1)\}$.

2) 1-й способ.

Имеем $2-\sqrt{3}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{xy}-\sqrt{3}=x+y-2 \Rightarrow$ $\left(2\sqrt{xy}-\sqrt{3}\right)^2=(x+y-2)^2 \Leftrightarrow \quad \sqrt{3xy}=\frac{1}{4}\left(4xy+3-(x+y-2)^2\right)$, следовательно, $\sqrt{3xy}=z$, $z\in Q$. Имеем $2-\sqrt{3}=x+y-2\sqrt{xy}=$ $=x+y-\frac{2}{\sqrt{3}}z \Leftrightarrow \sqrt{3}(x+y-2)=2z-3$.

Если $x+y-2\neq 0$, то $\sqrt{3}$ является рациональным числом, что невозможно. Итак, $x+y-2=0$, значит $2z-3=0$, т.е. $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2\sqrt{3xy}-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ или $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$ и так как $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2-\sqrt{3}}>0$, то $x>y$.

Итак, $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

2-й способ.

Имеем $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=$ $=\frac{x-y}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, $\quad 2\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\frac{x-y}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$ $=\frac{2-\sqrt{3}+x-y}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, $\quad 2\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)x}=(x-y+2)-\sqrt{3}$, $\quad 4\left(2-\sqrt{3}\right)x=$ $=(x-y+2)^2+3-2\sqrt{3}(x-y+2) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(2-x-y)=$ $=(x-y+z)^2+3-8x$.

Если $2-x-y\neq 0$, то $\sqrt{3}$ является рациональным числом, что невозможно, значит $2-x-y=0$, тогда $(x-y+2)^2+3-8x=0$, следовательно, $(x-(2-x)+2)^2+3-8x=0 \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$ или $x=\frac{3}{2}$, причем $y=2-x$, значит $y=\frac{3}{2}$ или $y=\frac{1}{2}$ соответственно, и так как $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2-\sqrt{3}}>0$, то $x>y$.

Итак, $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$.

3) Имеем $x+\sqrt{y}=\frac{y+1+2\sqrt{y}}{x} \Rightarrow x^2-y-1=(2-x)\sqrt{y}$.

Если $2-x\neq 0$, то $\sqrt{y}$ является рациональным числом, что невозможно, ибо $y$ простое.

Итак, $2-x=0$, $x=2$, $y=3$.

Ответ: $\{(2, 3)\}$.

91. Лемма 1.

Для любых положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$ справедливо неравенство $x_1y_1+\ldots+x_ny_n\leq$ $\leq\sqrt{\left(x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2\right)\left(y_1{}^2+\ldots+y_n{}^2\right)}$, причем равенство достигается лишь в случае, когда $\frac{x_1}{y_1}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}$.

Доказательство.

Очевидно, $(ty_1-x_1)^2+\ldots+(ty_n-x_n)^2\geq 0$ для любых действительных значений $t$, причем равенство достигается при $t=\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}$.

Имеем $t^2\left(y_1{}^2+\ldots+y_n{}^2\right)-2t(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)+\left(x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2\right)\geq 0$ для любых значений $t$, значит дискриминант $D\geq 0$, т.е. $D=4(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2-4\left(x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2\right)\left(y_1{}^2+\ldots+y_n{}^2\right)\leq 0\Leftrightarrow$ $(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2\leq\left(x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2\right)\left(y_1{}^2+\ldots+y_n{}^2\right)$.

Лемма доказана.

Лемма 2.

Для любых положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ справедливо неравенство $x_1+\ldots+x_n\geq n\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$, причем равенство достигается лишь в случае, когда $x_1=\ldots=x_n$.

Доказательство.

Проведем доказательство методом математической индукции.

При $n=2$ неравенство очевидно.

Предположим, исходное неравенство справедливо для $n$ и докажем для $(n+1)$. Действительно, $x_1+\ldots+x_{n+1}+(n-1)\cdot$ $\cdot\sqrt[n+1]{x_1\ldots x_{n+1}}=(x_1+\ldots+x_n)+\left(x_{n+1}+\sqrt[n+1]{x_1\ldots x_{n+1}}+\ldots+\sqrt[n+1]{x_1\ldots x_{n+1}}\right)\geq$

$$\geq n\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}+n\sqrt[n]{x_{n+1}(x_1\ldots x_{n+1})^{\frac{n-1}{n+1}}}\geq 2n\sqrt{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\sqrt[n]{x_{n+1}(x_1\ldots x_{n+1})^{\frac{n-1}{n+1}}}}=$$

$=2n\sqrt[2n]{(x_1\ldots x_n)^{\frac{2n}{n+1}}}=2n\sqrt[n+1]{x_1\ldots x_{n+1}}$, т.е. $x_1+\ldots+x_{n+1}+(n-1)\cdot$ $\cdot\sqrt[n+1]{x_1\ldots x_{n+1}}\geq 2n\sqrt[n+1]{x_1\ldots x_{n+1}}\Leftrightarrow x_1+\ldots+x_{n+1}\geq(n+1)\sqrt[n+1]{x_1\ldots x_{n+1}}$, что и требовалось доказать, следовательно, исходное неравенство справедливо для любого натурального значения $n$, причем, как видно из рассуждений, равенство достигается лишь в случае, когда $x_1=\ldots=x_n$.

Лемма доказана.

1) Покажем, что $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$ **(1)**

$\Leftrightarrow 4n+1<\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2<4n+2\Leftrightarrow 4n+1<2n+1+2\sqrt{n^2+n}<$ $<4n+2\Leftrightarrow 2n<2\sqrt{n^2+n}<2n+1<4n^2<4n^2+4n<4n^2+4n+1$, что очевидно.

Предположим, существует целое $m$ такое, что $\sqrt{4n+1}<m<\sqrt{4n+2}$, тогда $4n+1<m^2<4n+2$, что невозможно. Заметим также, что $4n+2$ не является полным квадратом, так как $4n+2$ делится на 2, но не делится на 4. Так как между числами $\sqrt{4n+1}$ и $\sqrt{4n+2}$ не существует целых чисел и $\sqrt{4n+2}$ не является целым числом ($4n+2$ не является квадратом), то существует целое $k$, такое, что $k\leq\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}<k+1$, значит $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$.

2) Покажем, что $\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<\sqrt{9n+9}$. **(2)**

Если $n=1$ или $n=2$, то (2) очевидно.

Пусть $n\geq 3$. Согласно лемме 1, имеем $1\cdot\sqrt{n}+$ $+1\cdot\sqrt{n+1}+1\cdot\sqrt{n+2}<\sqrt{(1+1+1)((n+1)+(n+2)+(n+3))}=\sqrt{9n+9}$.

Согласно лемме 2, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\geq 3\sqrt[6]{n(n+1)(n+2)}$.
Покажем, что $3\sqrt[6]{n(n+1)(n+2)}>\sqrt{9n+8}\Leftrightarrow 729n(n+1)(n+2)>$
$>(9n+8)^3\Leftrightarrow 243n^2-270n-512>0$, что очевидно, так как $n\geq 3$.

Итак, неравенство (2) справедливо для любого натурального значения $n$.

Предположим, $\sqrt{9n+8}<m<\sqrt{9n+9}$, где $m\in N\Leftrightarrow$ $9n+8<m^2<9n+9$, что невозможно. Так как между числами $\sqrt{9n+8}$ и $\sqrt{9n+9}$ не существует натуральных чисел и справедливо неравенство (2), то $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right]=\left[\sqrt{9n+8}\right]$.

3) Покажем, что

$$\sqrt{16n+23}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}<\sqrt{16n+24}. \qquad (3)$$

Если $n=1,\ldots,8$, то (3) очевидно.

Пусть $n\geq 9$.

Согласно лемме 1, имеем $1\cdot\sqrt{n}+1\cdot\sqrt{n+1}+1\cdot\sqrt{n+2}+$
$+1\cdot\sqrt{n+3}<\sqrt{(1+1+1+1)(n+(n+1)+(n+2)+(n+3))}=\sqrt{16n+24}$.

Согласно лемме 2, имеем $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}>$
$>4\sqrt[8]{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Покажем, что $4\sqrt[8]{n(n+1)(n+2)(n+3)}>\sqrt{16n+23}\Leftrightarrow$
$4^8n(n+1)(n+2)(n+3)>(16n+23)^4\Leftrightarrow$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)\geq\left(n+\frac{23}{16}\right)^4. \qquad (4)$$

Имеем $n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=(n^2+3n)^2+$
$+2(n^2+3n)=(n^2+3n+1)^2-1$, тогда из неравенства (4) заключаем, что $(n^2+3n+1)^2-\left(n+\frac{23}{16}\right)^4>1\Leftrightarrow(n^2+3n+1)^2-(n^2+\frac{23}{8}n+$
$+\frac{529}{256})^2>1\Leftrightarrow\left(\frac{n}{8}-\frac{313}{216}\right)\left(2n^2+\frac{47}{8}n+\frac{745}{256}\right)>1$, что очевидно, так как $n\geq 9$.

Предположим, $\sqrt{16n+23}<m<\sqrt{16n+24}$, где $m\in N\Leftrightarrow$

$16n+23<m^2<16n+24$, что невозможно. Так как между числами $\sqrt{16n+23}$, $\sqrt{16n+24}$ не существует целых чисел и справедливо неравенство (3), то $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{16n+23}\right]$.

92. Имеем $x^2y^2-2\cdot 1999xy+1999^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow$
$\left(x^2y^2-2\cdot 1998xy+1998^2\right)+2\cdot 1998+1=x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow (xy-$
$-1998)^2+3997=(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y-xy+1998)(xy+xy-1998)=$
$=3997$. Так как $3997=(\pm 1)(\pm 3997)=(\pm 7)(\pm 571)$, то

$$\begin{cases} x+y-xy+1998=\pm 1; \pm 3997; \pm 7; \pm 571 \\ x+y+xy-1998=\pm 3997; \pm 1; \pm 571; \pm 7 \end{cases}$$

Составим суммы и разности полученных уравнений в системах, получим $\begin{cases} x+y=1999; -1999; 289; -289 \\ xy-1998=\pm 1998; \pm 1998; \pm 282; \pm 282 \end{cases}$, откуда находим $(x, y)=\{(\pm 1999, 0), (0, \pm 1999)\}$.

Ответ: $\{(\pm 1999, 0), (0, \pm 1999)\}$.

93. Заметим, что $\dfrac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}=\dfrac{1}{n^2+n+1}$, тогда

$$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right),$$ с учетом условия

имеем $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{m^2+2}\right) \Leftrightarrow n^2+n+1=m^2+2 \Leftrightarrow$

$n^2+n=m^2+1 \Leftrightarrow 4n^2+4n=4m^2+4 \Leftrightarrow (2n+1)^2=4m^2+5 \Leftrightarrow$
$(2n-2m+1)(2n+2m+1)=5$, причем $m,n\in N$, $2n+2m+1>$
$>2n-2m+1$, значит $\begin{cases} 2n+2m+1=5 \\ 2n-2m+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=n=1$.

Ответ: $\{(1, 1)\}$.

94. 1) Пусть $x=\dfrac{a}{k}$, $y=\dfrac{b}{k}$, $z=\dfrac{c}{k}$, где $a, b, c, k\in Z$, $k\neq 0$, $k$ является наименьшим общим кратным знаменателем чисел $x, y, z$, тогда $a^2+b^2-3c^2=0$. **(1)**

Если $c=0$, то $a=b=0$. Если $a=0$, то $b^2=3c^2$, значит $c=0$ (иначе $\sqrt{3}$ является рациональным числом, что невозможно), тогда $b=0$.

Аналогично, если $b=0$, то $a=c=0$, тогда $x=y=z=0$.

Предположим, $abc \neq 0$. Выберем решение уравнения (1) с наименьшим значением $|c|$ $(c \neq 0)$. Так как $a^2+b^2$ делится на 3, то $a, b$ делятся на 3 (см. № 26.1 (2-й способ)), т.е. $a=3m$, $b=3n$, тогда $3(m^2+n^2)-c^2=0$, значит $c$ делится на 3, т.е. $c=3l$, где $m, n, l \in Z$, следовательно, $m^2+n^2-3l^2=0$. Таким образом, $(m, n, l)$ удовлетворяет (1), причем $|c|=|3l|>|l|$, что противоречит определению $|c|$. Получено противоречие.

Ответ: $\{(0, 0, 0)\}$.

2) Пусть $x=\dfrac{a}{k}$, $y=\dfrac{b}{k}$, $z=\dfrac{c}{k}$, где $a, b, c, k \in Z$, $k \neq 0$, тогда

$$a^3+3b^3+9c^3+27abc=0. \qquad (2)$$

Если $c=0$, тогда $3b^3=-a^3$, значит $b=0$ (иначе $\sqrt[3]{3}$ является рациональным числом $\left(-\dfrac{a}{b}\right)$, что невозможно), тогда $a=0$. Аналогично, если $a=0$ или $b=0$, получаем $a=b=c=0$, т.е. $x=y=z=0$.

Предположим, $abc \neq 0$.

Выберем решение уравнения (2) с наименьшим возможным значением величины $|c|$.

Из (2) заключаем, $a^3$ делится на 3, т.е. $a=3m$, где $m \in Z$, тогда $9m^3+b^3+3c^3+27mbc=0$.

Аналогично $b, c$ делятся на 3, т.е. $b=3n$, $c=3l$, где $n, l \in Z$, тогда $m^3+3n^3+9l^3+27mnl=0$. Таким образом, $(m, n, l)$ удовлетворяет уравнению (2), причем $|c|=|3l|>|l|$, что противоречит определению величины $|c|$.

Ответ: $\{(0, 0, 0)\}$.

3) Пусть $x=\dfrac{a}{k}$, $y=\dfrac{b}{k}$, $z=\dfrac{c}{k}$, $t=\dfrac{d}{k}$, где $a, b, c, d, k \in Z$

$(k \neq 0)$, тогда $a^4 + 2b^4 = 4c^4 + 8d^4$. **(3)**

Очевидно, $a = b = c = d = 0$ является решением уравнения (3), тогда $x = y = z = t = 0$.

Предположим, существует решение уравнения (3), для которого хотя бы одно из чисел $a, b, c, d$ отлично от нуля. Пусть для определенности $a \neq 0$. Среди всех таких решений выберем решения с наименьшим возможным значением $|a|$.

Из (3) имеем $a^4$ делится на 2, т.е. $a = 2m$, тогда $8m^4 + b^4 = 2c^4 + 4d^4$.

Аналогично $b = 2n$, $c = 2l$, $d = 2r$, где $m, n, l, r \in Z$, тогда $m^4 + 2n^4 = 4l^4 + 8r^4$, таким образом, $(m, n, l, r)$ удовлетворяет уравнению (3), причем $|a| = |2m| > |m|$, что противоречит определению $|a|$.

Ответ: $\{(0, 0, 0, 0)\}$.

4) Пусть $x = \dfrac{a}{k}$, $y = \dfrac{b}{k}$, $z = \dfrac{c}{k}$, $t = \dfrac{d}{k}$, где $a, b, c, d, k \in Z$ $(k \neq 0)$, тогда $a^5 + 2b^5 + 11c^5 + 33d^5 = 0$. **(4)**

Очевидно, $a = b = c = d = 0$ является решением уравнения (4), тогда $x = y = z = t = 0$.

Предположим, существует решение уравнения (4), для которого хотя бы одно из чисел $a$, $b$, $c$, $d$ отлично от нуля.

Пусть для определенности $a \neq 0$, тогда среди всех таких решений выберем решение с наименьшим значением величины $|a|$. Заметим, что $n^5$ при делении на 11 дает в остатке $0; \pm 1$. Действительно, если $n = (11k+1)^5$; $(11k-2)^5$; $(11k+3)^5$; $(11k+5)^5$, то остаток при делении на 11 равен 1; если $n = (11k-1)^5$; $(11k+2)^5$; $(11k-3)^5$; $(11k-5)^5$, то остаток равен (-1); если $n = (11k)^5$, то остаток равен 0 для любого целого $k$.

Согласно (4), $a^5 + 2b^5$ делится на 11, причем, если $a$ или $b$ не делятся на 11, тогда остаток при делении числа $a^5 + 2b^5$ на 11 равен $\pm 2; \pm 1; \pm 3$, что невозможно. Итак, $a$, $b$ делятся на 11, т.е. $a = 11m$, $b = 11n$, где $m, n \in Z$, тогда

$11^4 a^5 + 2 \cdot 11^4 b^5 + c^5 + 2d^2 = 0$, следовательно, $c^5 + 2d^5$ делится на 11, значит $c, d$ делятся на 11, т.е. $c = 11l$, $d = 11r$, где $l, r \in Z$, тогда $m^5 + 2n^5 + 11l^5 + 33r^5 = 0$. Таким образом, $(m, n, l, r)$ удовлетворяет уравнению (4), однако $|a| = |11m| > |m|$, что противоречит определению $|a|$.

Ответ: $\{(0, 0, 0, 0)\}$.

95. Очевидно, $z > 1$. Имеем $x < z$, $y < z$, тогда $x \le z - 1$, $y \le z - 1$, значит $1999^z z^{1999} = 1999^x x^{1999} + 1999^y y^{1999} \le$ $\le 2 \cdot 1999^{z-1} (z-1)^{1999}$, т.е. $1999^z z^{1999} \le 2 \cdot 1999^{z-1} (z-1)^{1999} \Leftrightarrow$ $\left(\frac{z}{z-1}\right)^{1999} \le \frac{2}{1999}$, что невозможно, так как $\left(\frac{z}{z-1}\right)^{1999} = \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^{1999} > 1$.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

96. 1) Если $xyz = 0$, то $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Предположим, $xyz \ne 0$.

Пусть $d = (x, y)$, т.е. $x = da$, $y = db$, где $(a, b) = 1$, тогда имеем $a^2 + b^2 = abz$.

Покажем, что $ab$, $a^2 + b^2$ взаимно просты.

Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $ab$, $a^2 + b^2$. Так как $p$ делит $ab$, то $p$ делит $a$ или $p$ делит $b$. Пусть для определенности $p$ делит $a$, тогда $p$ делит $b^2 = (a^2 + b^2) - a^2$, т.е. $p$ делит $b$, что невозможно, ибо $(a, b) = 1$. Итак, $(a^2 + b^2, ab) = 1$, причем $ab$ делит $a^2 + b^2$, значит $ab = \pm 1$, т.е. $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, следовательно, $z = \pm 2$, причем $x = \pm d$, $y = \pm d$ (так как $x = ad$, $y = bd$).

Ответ: $\{(0, 0, z), (\pm d, \pm d, 2), (\pm d, \mp d, -2) : d, z \in Z\}$.

2) 1-й способ.

Если $xyzt = 0$, то $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Пусть $xyzt \ne 0$. Пусть $d = (x, y, z)$, т.е. $x = ad$, $y = bd$, $z = cd$, где $(a, b, c) = 1$, тогда $a^2 + b^2 + c^2 = 2abcdt$. **(1)**

Так как $(a, b, c) = 1$, то среди $a, b, c$ хотя бы одно нечетное, причем из (1) $a^2 + b^2 + c^2$ четно, таким образом, среди чисел $a$, $b$, $c$ ровно два нечетных и одно четное. Пусть для определенности $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, $c = 2k$, тогда из (1) $4(m^2 + m + n^2 + n + k^2) + 2 = 4(2m+1)(2n+1)kdt$, что невозможно, так как левая часть не делится на 4, а правая делится.

Итак, $x = y = z = 0$, $t$ любое целое число.

2-й способ.

Если $xyzt = 0$, то $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Предположим, $xyzt \neq 0$.

Пусть $x = 2^m a$, $y = 2^n b$, $z = 2^k c$, где $m, n, k \in Z$; $m, n, k \geq 0$; $a$, $b$, $c$ – нечетные числа.

Пусть для определенности $m \leq n \leq k$.

Если $m < n \leq k$, то $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyzt \Leftrightarrow a^2 + 4^{n-m} b^2 + + 4^{k-m} c^2 = 2^{(n-m)+(k-m)+1} abct$, что невозможно, так как слева – нечетное число, справа – четное.

Если $m = n < k$, то $a^2 + b^2 + 4^{k-m} c^2 = 2^{k-m+1} abct$, что невозможно, так как число, стоящее справа, делится на 4, а слева не делится на 4.

Если $m = n = k$, то $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{m+1} abct$, что невозможно, так как слева – нечетное число, справа четное.

Ответ: $\{(0, 0, 0, t) : t \in Z\}$.

3) 1-й способ.

Если $xyzt = 0$, то $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$.

Предположим, $xyzt \neq 0$. Пусть $s = (x, y, z, t)$, тогда $x = as$, $y = bs$, $z = cs$, $t = ds$, где $(a, b, c, d) = 1$, причем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2abcds^2. \qquad (2)$$

Так как $(a, b, c, d) = 1$, то хотя бы одно из чисел $a$, $b$, $c$, $d$ является нечетным, причем $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ четное число, значит либо все $a$, $b$, $c$, $d$ нечетные, либо ровно два из них четные, либо ровно два – нечетные.

Рассмотрим $a, b, c, d$ – нечетные числа, т.е. $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, $c = 2k + 1$, $d = 2l + 1$, тогда $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = = 4(m(m+1) + n(n+1) + k(k+1) + l(l+1)) + 4 = 8r + 4$, где $m$, $n$, $k$, $l$,

$r \in Z$, тогда из (2) $8r+4 = 2(2m+1)(2n+1)(2k+1)(2l+1)s^2$, значит $s = 2q$, где $q \in Z$, следовательно, $2r+1 = 2q^2(2m+1)(2n+1)\cdot$ $\cdot(2l+1)(2k+1)$, что невозможно, так как слева – нечетное число, справа – четное.

Рассмотрим $a, b$ нечетные; $c, d$ четные, т.е. $a = 2m+1$, $b = 2n+1$, $c = 2k$, $d = 2l$, тогда из (2) $4(m^2+m+n^2+n+k^2+l^2)+2 = 8(2m+1)(2n+1)kls^2$, что невозможно, так как левая часть не делится на 4, а правая – делится на 4.

2-й способ.

Если $xyzt = 0$, то $x^2+y^2+z^2+t^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$.

Предположим, $xyzt \neq 0$.

Пусть $x = 2^m a$, $y = 2^n b$, $z = 2^k c$, $t = 2^l d$, где $a, b, c, d \in Z$; $m, n, k, l$ – целые неотрицательные числа, тогда

$$4^m a^2 + 4^n b^2 + 4^k c^2 + 4^l d^2 = 2^{m+n+k+l+1} abcd. \qquad (3)$$

Пусть для определенности $m \leq n \leq k \leq l$. Предположим, $m < n$, тогда из (3) $a^2 + 4^{n-m} b^2 + 4^{k-m} c^2 + 4^{l-m} d^2 = 2^{(n-m)+k+l+1} abcd$, что невозможно, так как слева – нечетное число, справа – четное. Итак, $m = n$.

Предположим, $m = n < k$, тогда из (3) $a^2 + b^2 + 4^{k-m} c^2 + 4^{l-m} =$ $= 2^{k+l+1} abcd$, что невозможно, так как левая часть не делится на 4, а правая часть делится на 4.

Итак, $m = n = k$. Предположим, $m = n = k < l$, тогда из (3) $a^2 + b^2 + c^2 + 4^{l-m} d^2 = 2^{k+l+1} abcd$, что невозможно, так как левая часть – нечетное число, правая – четное число. Итак, $m = n = k = l$, тогда $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^{k+l+1} abcd$, где $a, b, c, d$ нечетные числа, что невозможно (см. 1-й способ).

Ответ: $\{(0, 0, 0, 0)\}$.

97. 1) 1-й способ.

Пусть $u = z + xyt$, тогда $x^2 + y^2 + (u - xyt)^2 = x^2y^2t^2 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + u^2 = 2xyut \Leftrightarrow x = y = u = 0$ (см. № 96), значит $z = u - xyt = 0$.

Итак, $x = y = z = 0$, $t$ – любое целое число.

2-й способ.

Если $xy = 0$, то $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Предположим, $xy \neq 0$. Пусть $d = (x, y, z)$, т.е. $x = da$, $y = db$, $z = dc$, где $(a, b, c) = 1$, причем $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2d^2t^2$. **(1)**

Если $a, b, d, t$ нечетные числа, тогда из (1) $c$ нечетное число, тогда $a = 2m+1$, $b = 2n+1$, $c = 2k+1$, $abdt = 2l+1$, значит $(2m+1)^2 + (2n+1)^2 + (2k+1)^2 = (2l+1)^2 \Leftrightarrow 2(l^2 + l - m^2 - m - n^2 - n - k^2 - k) = 1$, что невозможно.

Итак, среди чисел $a, b, d, t$ хотя бы одно четное, т.е. $abdt = 2l$, где $l \in Z$.

Так как $(a, b, c) = 1$, то хотя бы одно из них нечетное число, причем $a^2 + b^2 + c^2 = 4l^2$, значит среди $a, b, c$ ровно два нечетных, одно – четное, тогда $(2m+1)^2 + (2n+1)^2 + (2k)^2 = 4l^2 \Leftrightarrow$ $2(l^2 - k^2 - m^2 - m - n^2 - n) = 1$, что невозможно.

Ответ: $\{(0, 0, 0, t) : t \in Z\}$.

2) 1-й способ.

Пусть $u = t + xyz$, тогда $x^2 + y^2 + z^2 + (u - xyz)^2 = x^2y^2z^2 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu \Leftrightarrow$ $x = y = z = 0$ (см. № 96), тогда $t = u - xyz = 0$.

Итак, $x = y = z = t = 0$.

2-й способ.

Если $xyz = 0$, то $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$.

Предположим, $xyz \neq 0$.

Пусть $m = (x, y, z, t)$, т.е. $x = am$, $y = bm$, $z = cm$, $t = dm$, где $(a, b, c, d) = 1$, тогда $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2m^4$. **(2)**

Так как $(a, b, c, d) = 1$, то хотя бы одно из чисел $a, b, c, d$ является нечетным числом.

Если $a, b, c, m$ нечетные числа, тогда $a = 2k+1$, $b = 2n+1$, $c = 2l+1$, $abcm^2 = 2r+1$, значит $(2k+1)^2 + (2n+1)^2 + (2l+1)^2 + d^2 = (2r+1)^2 \Leftrightarrow d^2 = 2\left(2\left(r^2 + r - k^2 - k - n^2 - n - l^2 - l - 1\right) + 1\right)$ делится на 2, но не делится на 4, что невозможно.

Итак, число $abcm^2$ является четным, т.е. $abcm^2 = 2r$, тогда из (2) заключаем, что либо все $a, b, c, d$ нечетные числа, либо ровно два из них четные, ровно два – нечетные.

Рассмотрим $a=2k+1$, $b=2n+1$, $c=2l$, $d=2s$, тогда $(2k+1)^2+(2n+1)^2+(2l)^2+(2s)^2=(2r)^2 \Leftrightarrow 1=2(r^2-s^2-l^2-k^2-$ $-k-n^2-n)$, что невозможно.

Если $a, b, c, d$ нечетные числа, т.е. $a=2k+1$, $b=2n+1$, $c=2l+1$, $d=2s+1$, тогда с учетом, что $abcm^2$ четное число, заключаем – $m$ четно, т.е. $abcm^2$ делится на 4, $abcm^2=4u$, $u\in Z$, значит из (2) $(2k+1)^2+(2n+1)^2+(2l+1)^2+(2s+1)^2=(4u)^2 \Leftrightarrow$ $1=2(2u^2-k^2-k-n^2-n-l^2-l-s^2-s)$, что невозможно.

Ответ: $\{(0,0,0,0)\}$.

98. Можно считать, что $x\le\frac{kyz}{2}$, $y\le\frac{kxz}{2}$, $z\le\frac{kxy}{2}$. Действительно, если, например, $z>\frac{kxy}{2}$, то, приняв $z_1=kxy-z$, получим $x^2+y^2+z_1^2=kxyz_1$, причем $z_1\le\frac{kxy}{2}$.

Пусть для определенности $x\le y\le z$, тогда $\frac{kxy}{2}-y\ge\frac{kxy}{2}-z\ge0$, значит $\left(\frac{kxy}{2}\right)^2=x^2+y^2+\left(\frac{kxy}{2}-z\right)^2\le$ $\le x^2+y^2+\left(\frac{kxy}{2}-y\right)^2 \Rightarrow$ $\left(\frac{kxy}{2}\right)^2\le x^2+y^2+\left(\frac{kxy}{2}-y\right)^2 \Leftrightarrow$ $x^2+2y^2\ge kxy^2$ и так как $x\le y$, то $3y^2\ge kxy^2 \Leftrightarrow$ $kx\le3$, т.е. $kx=1;2;3$.

Если $kx=1$, то $x^2+y^2+z^2=yz$, однако $x^2+y^2+z^2>$ $>y^2+z^2\ge2yz>yz$, что невозможно.

Если $kx=2$, то $x^2+y^2+z^2=2yz \Leftrightarrow$ $x^2+(y-z)^2=0 \Leftrightarrow$ $x=0$, $y=z$, что невозможно, ибо $x>0$.

Если $kx=3$, то $k=1$ или $k=3$.

Если $k=1$, то, например, $x=y=z=3$.

Если $k=3$, то, например, $x=y=z=1$.

Ответ: $\{1;3\}$.

99. 1) Если $p=2$, то $m^n=13$, что невозможно, так как $n>1$. Итак, $p\ne2$. Аналогично $p\ne5$.

Рассмотрим $p \geq 3$. Согласно биному Ньютона, имеем $2^p + 3^p = 2^p + (5-2)^p = 2^p + \left(5^2 k + p\left(5 \cdot 2^{p-1}\right) - 2^p\right) = 5\left(5k + p2^{p-1}\right)$, где $k \in Z$.

Так как $p \neq 5$, то $5\left(5k + p2^{p-1}\right)$ делится на 5, но не делится на $5^2$, значит $m^n$ делится на 5, но не делится на $5^2$, что невозможно, ибо $n > 1$.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2) Если $p = 2$, то $m^n = 25$, т.е. $m = 5$, $n = 2$.

Если $p = 7$, то $m^n = 7^2 \cdot 379$, что невозможно, так как $n > 1$.

Предположим, $p \geq 3$, $p \neq 7$, тогда, согласно биному Ньютона, имеем $3^p + 4^p = 3^p + (7-3)^p = 3^p + \left(7^2 l + p\left(7 \cdot 3^{p-1}\right) - 3^p\right) = 7\left(7l + p \cdot 3^{p-1}\right)$, где $l \in Z$, значит $m^n = 7\left(7l + p \cdot 3^{p-1}\right)$ делится на 7, но не делится на $7^2$, что невозможно, так как $n > 1$.

Ответ: $\{m = 5, n = 2, p = 2\}$.

100. Пусть $z = -y$, тогда $x^6 - x^3 z - z^{1999} = 0 \Leftrightarrow$

$$4x^6 - 4x^3 z + z^2 = z^2 + 4z^{1999} \Leftrightarrow \left(2x^3 - z\right)^2 = z^2\left(4z^{1997} + 1\right). \qquad \textbf{(1)}$$

Если $z = 0$, то $y = 0$, $x = 0$. Предположим $z \neq 0$, тогда из (1) заключаем, что $z > 0$.

Имеем $\left(\dfrac{2x^3}{z} - 1\right)^2 = 4z^{1997} + 1$. Пусть $\dfrac{2x^3}{z} - 1 = t$, где $t \in Q$,

тогда $t^2 = 4z^{1997} + 1$ – целое число, значит $t$ – целое число, причем $4z^{1997} + 1$ – нечетное число, значит $t$ – нечетное число, т.е. $t = 2s + 1$, тогда $(2s+1)^2 = 4z^{1997} + 1 \Leftrightarrow s(s+1) = z^{1997}$, причем

$$(s, s+1) = 1, \text{ значит } \begin{cases} s + 1 = a^{1997} \\ s = b^{1997} \\ z = ab \end{cases} \Rightarrow a^{1997} - b^{1997} = 1, \text{ где } a, b \in N.$$

Имеем $(a-b)\left(a^{1996} + a^{1995}b + \ldots + ab^{1995} + b^{1996}\right) = 1$, следовательно, $a - b = 1$, тогда $(b+1)^{1997} - b^{1997} = 1$, однако, $(b+1)^{1997} - b^{1997} = (b+1)^{1996} + (b+1)^{1995}b + \ldots + (b+1)b^{1995} + b^{1996} \geq 1997$, ибо $b \geq 1$. Получено противоречие.

Ответ: $\{(0,0)\}$.

101. 1-й способ.

Пусть $z = x + y$, $z \in Z$, тогда

$$\left((x+y)^3 - 3xy(x+y)\right) + xy = 11 \Leftrightarrow z^3 - 3xyz + xy = 11 \Leftrightarrow$$

$$xy = \frac{z^3 - 11}{3z - 1}, \qquad \textbf{(1)}$$

значит $27xy = \frac{(3z)^3 - 1 - 296}{3z - 1} = 9z^2 + 3z + 1 - \frac{296}{3z-1}$, причем $296 = 8 \cdot 37$, значит $3z - 1 = \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 37; \pm 74; \pm 148; \pm 296$ (так как $3z - 1$ делит 296), значит $z = 0; -1; 3; -12; 25; -49; 99$, тогда из (1) находим $\begin{cases} z = x + y = 0; -1; 3; -12; 25; -49 \\ xy = 11; 3; 2; 47; 211; 795 \end{cases}$.

Решая полученные системы, находим $(x, y) = \{(2,1), (1,2)\}$.

2-й способ.

Пусть $z = x + y$, где $z \in Z$, тогда $x^3 + x(z - x) + (z - x)^3 = 11 \Leftrightarrow$ $x^2(3z - 1) - x(3z^2 - z) + (z^3 - 11) = 0$. **(2)**

Решим уравнение (2) относительно $x$.

Найдем дискриминант $D = (3z^2 - z)^2 - 4(3z - 1)(z^3 - 11) =$ $= (3z - 1)(44 - z^3 - z^2)$. Очевидно, если $z \ge 4$ или $z \le 0$, то $D < 0$, что невозможно, следовательно, $z = 1; 2; 3$. Если $z = 1$ или $z = 2$, тогда корни уравнения (2) не являются целыми числами.

Итак, $z = 3$, тогда из (2) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ или $x = 1$, значит $y = z - x = 1$ или $y = 2$ соответственно.

3-й способ.

Имеем $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 11 - xy$.

Так как $x^2 - xy + y^2$ делит $11 - xy$, то $|x^2 - xy + y^2| \le |11 - xy| \Leftrightarrow$ $(x^2 - xy + y^2) - (11 - xy)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$ $(x^2 + y^2 - 11)((x - y)^2 + 11) \le 0$, значит $x^2 + y^2 - 11 \le 0 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 \le 11 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \le 11 \\ y^2 \le 11 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} |x| \le 3 \\ |y| \le 3 \end{cases}$.

При подстановке данных $x, y$ в исходное уравнение находим $(x, y) = \{(2, 1), (1, 2)\}$.

Ответ: $\{(2, 1), (1, 2)\}$.

102. Если $z = 1$, то $(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = 2xy \Leftrightarrow \quad 2y^2 = 2xy$, значит $x = y$.

Если $z = 2$, то, очевидно, $x, y$ – любые натуральные числа.

Пусть $z > 2$. Имеем $1 = \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)^z + \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^z$.

Если $x \neq y$, то $\left|\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right| < 1$, $\left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| < 1$, тогда $\left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)^z + \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^z < \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2 = 1$, что невозможно.

Ответ: если $z = 2$, то $x, y$ – любые натуральные числа;
если $z \neq 2$, то $x = y$.

103. Имеем $\frac{(x+1)^y}{x+1} = (x+1)^y (x-1)$, тогда $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^y = x^2 - 1$ (очевидно, $x \neq 1$).

Пусть $z = \frac{x+1}{x-1}$, $z \in Q$.

Так как $z \in Q$, $z^y \in N$, то $z \in N$, значит $z = 1 + \frac{2}{x-1}$ – целое, т.е. $x - 1$ делит 2, тогда $x - 1 = 1$ или $x - 1 = 2 \Leftrightarrow$ $x = 2$ или $x = 3$.

Если $x = 2$, то $y = 1$; если $x = 3$, то $y = 3$.

Ответ: $\{(2, 1), (3, 3)\}$.

104. 1) Очевидно, $y \neq 1$, $x \neq 1$.

Если $x = 2$, то $2^y = y + 2$. Заметим, что $2^y > y + 2$ для любого $y > 2$, следовательно, $y = 2$.

Предположим, $x \geq 3$, тогда $y = x^y - x = x(x^{y-1} - 1) \geq 3(3^{y-1} - 1) = 3^y - 3$, однако $y < 3^y - 3$ для любого $y > 1$. Получено противоречие.

Ответ: $\{(2, 2)\}$.

2) Очевидно, $x \neq 1$, $y \neq 1$.

Если $x = 2$, то $2^y + y^2 = 3y + 2$.

Если $y \geq 3$, то $2^y + y^2 \geq 8 + y^2 \geq 8 + 3y > 3y + 2$, что невозможно. Итак, $y = 2$.

Аналогично, если $y = 2$, то $x = 2$.

Предположим, $x \geq 3$, $y \geq 3$, тогда $3^{y-1} > y + 1$, значит $y^x + x(x^{y-1} - y - 1) > y + 3(3^{y-1} - y - 1) > y$, т.е.

$y^x + x(x^{y-1} - y - 1) > y \Leftrightarrow \quad y^x + x^y > xy + x + y$, что противоречит условию.

Ответ: $\{(2, 2)\}$.

105. 1) Имеем $4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 1 \Leftrightarrow \quad (2x+1)^2 - (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$(2x - 2y + 1)(2x + 2y + 1) = 1 \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - 2y - 1 = \pm 1 \\ 2x + 2y + 1 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = y = 0$ или $x = -1$, $y = 0$.

Ответ: $\{(0, 0), (-1, 0)\}$.

2) Пусть $x = z - 1$, тогда $(z-1)z(z+1) = y^2 \Leftrightarrow \quad z(z^2 - 1) = y^2$. (1)

Если $z = 0$ или $z = \pm 1$, то $y = 0$, значит $x = 0$ или $x = -1$ или $x = -2$.

Пусть $|z| > 1$, тогда $z^2 - 1 > 0$, значит из (1) заключаем $z > 0$, причем $|z| > 1$, значит $z \geq 2$. Так как $z$, $z^2 - 1$ взаимно просты, то из

(1) $\quad \begin{cases} z = a^2 \\ z^2 - 1 = b^2 \\ y = ab \end{cases}$, где $a, b \in Z$, тогда $z^2 - b^2 = 1 \Leftrightarrow$

$(z-b)(z+b) = 1 \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z - b = \pm 1 \\ z + b = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad z = \pm 1$, $b = 0$, тогда $y = ab = 0$, значит $x = 0; -1; -2$.

Ответ: $\{(0, 0), (-1, 0), (-2, 0)\}$.

3) Имеем $x(x+1)(x+2)(x+3) = (x(x+3))(x+1)(x+2) =$
$= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1$.

Пусть $x^2+3x+1=z$, тогда, согласно условию, имеем $y^2=z^2-1 \Leftrightarrow (z-y)(z+y)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} z-y=\pm1 \\ z+y=\pm1 \end{cases} \Leftrightarrow z=\pm1,\ y=0$.

Так как $y=0$, то $x=0;-1;-2;-3$.

Ответ: $\{(0,0),(-1,0),(-2,0),(-3,0)\}$.

4) Покажем, исходное уравнение неразрешимо в натуральных числах. Очевидно, $x\neq1$. Если $x$ четно, то числа $x+1$, $x(x+2)(x+3)$ взаимно просты. Действительно, предположим $x+1=dm$, $x(x+2)(x+3)=dn$, где $d,n,m\in N$.

Так как $x$ четно, $d$ делит $x+1$, то $d$ нечетно.

Имеем $(dm-1)(dm+1)(dm+2)=dn \Leftrightarrow d\left(d^2m^3+2dm^2-m-n\right)=$ $=2$, значит $d$ делит 2, $d=1$, что и требовалось доказать.

Так как $(x+1)$ и $x(x+2)(x+3)$ взаимно просты, тогда, согласно условию, имеем $x+1=t^3$, $x(x+2)(x+3)=x^3$, где $z,t\in N$.

Заметим, $(x+1)^3<x(x+2)(x+3)<(x+2)^3$ для любого $x\geq2$, тогда $(x+1)^3<z^3<(x+2)^3 \Leftrightarrow z+1<z<x+2$, что невозможно.

Если $x$ нечетно, то $x+2$ и $x(x+1)(x+3)$ взаимно просты. Действительно, предположим, $x+2=dm$, $x(x+1)(x+3)=dn$, где $d,m,n\in N$. Так как $x$ нечетно, $d$ делит $x+2$, то $d$ нечетно.

Имеем $(dm-2)(dm-1)(dm+1)=dn \Leftrightarrow d\left(n-d^2m^3+2dm^2+m\right)=$ $=2$, значит $d$ делит 2, т.е. $d=1$, что и требовалось доказать.

Так как $x+2$ и $x(x+1)(x+3)$ взаимно просты, то, согласно условию, $x+2=t^3$, $x(x+1)(x+3)=z^3$, где $z,t\in N$. Заметим, что $(x+1)^3<x(x+1)(x+3)<(x+2)^2$ для любого $x\geq2$, тогда $(x+1)^3<z^3<(x+2)^3 \Leftrightarrow x+1<z<x+2$, что невозможно. Итак, исходное уравнение неразрешимо в натуральных числах. Если $x=0;-1;-2;-3$, то $y=0$. Предположим, $x\leq-4$. Пусть $a=-3-x$, тогда $a\geq1$, причем $y^3=x(x+1)(x+2)(x+3)=$ $=a(a+1)(a+2)(a+3)$, значит $y\geq1$. Получаем $y^3=a(a+1)(a+2)(a+3)$, что невозможно, так как $a,y\in N$.

Ответ: $\{(0,0),(-1,0),(-2,0),(-3,0)\}$.

5) Пусть $x > 0$. Так как $x$, $x+1$ взаимно просты, то, согласно условию, имеем $\begin{cases} x = a^n \\ x+1 = b^n \\ y^n = (ab)^n \end{cases}$, где $a, b \in N$, тогда $b^n - a^n = 1 \Leftrightarrow$ $(b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}) = 1$, значит $b - a = 1$, $b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1} = 1$, что невозможно, так как $b^{n-1} + \ldots + a^{n-1} > 1 + 1 = 2$. Итак, исходное уравнение неразрешимо в целых числах, где $x$ натуральное число. Если $x = 0$ или $x = -1$, то $y = 0$.

Предположим, $x \le -2$. Пусть $c = -x - 1$, тогда $c \ge 1$, причем $x(x+1) = c(c+1)$. Имеем $c(c+1) = y^n$, где $c$ натуральное число, что невозможно.

Ответ: $\{(0, 0), (-1, 0)\}$.

6) Очевидно, $x \ne 1$.

Пусть $x > 1$. Примем $x + 1 = z$, где $z \ge 2$, тогда $z(z-1)(z+1) = y^n \Leftrightarrow z(z^2 - 1) = y^n$ и так как $z$, $z^2 - 1$ взаимно просты, $z = a^n$, $z^2 - 1 = b^n$, $y^n = (ab)^n$, где $a, b \in N$, тогда $(a^2)^n - 1 = b^n \Leftrightarrow (a^2)^n - b^n = 1$, что невозможно (см. пред. пункт).

Итак, исходное уравнение неразрешимо в целых числах, где $x \ge 1$.

Если $x = 0$ или $x = -1$ или $x = -2$, то $y = 0$.

Предположим $x \le -3$. Пусть $c = -x - 2$, тогда $c \ge 1$, причем $x(x+1)(x+2) = -c(c+1)(c+2)$. Имеем $c(c+1)(c+2) = -y^n$, где $c \ge 1$.

Так как $c(c+1)(c+2) > 0$, то $n$ нечетно (иначе, если $n$ четно, то $y^n \ge 0$, $(-y^n) \le 0$), значит $c(c+1)(c+2) = (-y)^n$ неразрешимо в целых числах, так как $c \ge 1$.

Ответ: $\{(0, 0), (-1, 0), (-2, 0)\}$.

7) Пусть $n \ge 3$ (случай $n = 2$, см. 3).)

Покажем, что исходное уравнение неразрешимо в целых числах, где $x$ натуральное число.

Очевидно, $x \neq 1$. Если $x$ четно, тогда $(x+1)$, $x(x+2)(x+3)$ взаимно просты (см. 3)), значит, согласно условию, $x+1=a^n$, $x(x+2)(x+3)=b^n$, где $a,b \in N$, тогда $(a^n-1)(a^n+1)(a^n+2)=b^n \Leftrightarrow$ $a^{3n}+2a^{2n}-a^n-2=b^n$.

Пусть $a^n=c$, тогда $c^3+2c^2-c-2=b^n$, где $c \in N$. Так как $x$ четно, то $x \geq 2$, $c=x+1 \geq 3$.

Заметим, $c^3 < c^3+2c^2-c-2 < (c+1)^3$ для любого $c \geq 3$, тогда $(a^n)^3 < b^n < (a^n+1)^3 \leq (a^3+1)^n$, значит $a^3 < |b| < a^3+1$, что невозможно.

Покажем, что $(a^n+1)^3 \leq (a^3+1)^n$ для любого $n \geq 3$.

Имеем $(a^3+1) \geq a^{3n}+C_n^{\,1}a^{3(n-1)}+C_n^{\,2}a^{3(n-2)}+1=a^{3n}+na^{2n}a^{n-3}+$ $+\dfrac{n(n-1)}{2}a^n a^{2(n-3)}+1 \geq a^{3n}+3a^{2n}+3a^n+1=(a^n+1)^3$, что и требовалось доказать.

Если $x$ нечетно, то $x+2$, $x(x+1)(x+3)$ взаимно просты (см. 4)), тогда, согласно условию, имеем $x+2=a^n$, $x(x+1)(x+3)=b^n$, где $a,b \in N$, значит $(a^n-2)(a^n-1)(a^n+1)=b^n \Leftrightarrow a^{3n}-2a^{2n}-a^n+2=$ $=b^n \Leftrightarrow c^3-2c^2-c+2=b^n$, где $c=a^n$, $c \in N$, $c \geq 4$ (так как $c=x+2 \geq 4$).

Заметим, что $(c-1)^3 < c^3-2c^2-c+2 < c^3$ для любого $c \geq 4$, значит $(a^n-1)^3 < b^n < a^{3n}$, причем $(a^3-1)^n \leq (a^n-1)^3$ для любого $n \geq 3$, тогда $(a^3-1)^n < b^n < a^{3n} \Leftrightarrow a^3-1 < |b| < a^3$, что невозможно.

Покажем, что $(a^3-1)^n \leq (a^n-1)^3$. (*)

Для $n=3$ неравенство (*) справедливо.

Предположим, (*) справедливо для $k$ и докажем для $(k+1)$.

Имеем $\left(\dfrac{a^{k+1}-1}{a^k-1}\right)^3=\left(a+\dfrac{a-1}{a^k-1}\right)^3 > a^3 > a^3-1 \Rightarrow$

$(a^{k+1}-1)^3 > (a^k-1)^3(a^3-1) > (a^3-1)^k(a^3-1)=(a^3-1)^{k+1}$, что и требовалось доказать.

Итак, исходное уравнение неразрешимо в целых числах, где $x$ натуральное число. Если $x=0$, или $x=-1$, или $x=-2$, или $x=-3$, то $y=0$. Предположим, $x \le -4$. Пусть $z=-3-x$, тогда $z \ge 1$, причем $x(x+1)(x+2)(x+3)=z(z+1)(z+2)(z+3)$, получаем уравнение $z(z+1)(z+2)(z+3)=y^n$ в целых числах, где $z$ натуральное число, следовательно, оно неразрешимо.

Ответ: $\{(0, 0), (-1, 0), (-2, 0), (-3, 0)\}$.

106. Очевидно, $x > y$.

Имеем $x(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}} - x = y(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}} + y \Leftrightarrow (x-y)(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}} =$

$$= x+y \Leftrightarrow (x-y)(x-y)^{\frac{y}{x}}(x+y)^{\frac{y}{x}} = x+y \Leftrightarrow$$

$$(x-y)^{1+\frac{y}{x}} = (x+y)^{1-\frac{y}{x}} \Leftrightarrow (x-y)^{x+y} = (x+y)^{x-y} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^{\frac{1}{x-y}} = (x+y)^{\frac{1}{x+y}} \Leftrightarrow \ln(x-y)^{\frac{1}{x-y}} = \ln(x+y)^{\frac{1}{x+y}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(x-y)}{x-y} = \frac{\ln(x+y)}{x+y}. \qquad (2)$$

Рассмотрим $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, где $t > 0$.

$f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$. Если $t \ge 3$, то $f'(t) < 0$, значит $f(t)$ убывает на полуинтервале $(3, +\infty)$, следовательно, если $n > m \ge 3$, тогда $f(n) < f(m)$. Предположим, $x-y \ge 3$, тогда $x+y > x-y \ge 3$, значит $f(x-y) > f(x+y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x-y)}{x-y} > \frac{\ln(x+y)}{x+y}$, что противоречит (2).

Итак, $x-y=1$ или $x-y=2$.

Если $x-y=1$, тогда из (1) $x+y=1$, тогда $2y=(x+y)-(x-y)=1-1=0$, что невозможно, ибо $y>0$. Если $x-y=2$, тогда из (1) $(x+y)^2 = 2^{x+y}$. Так как $2^z > z^2$ для любого $z > 4$, то $x+y \le 4$, причем $x+y > x-y = 2$, т.е. $x+y \ge 3$.

Таким образом, $x+y=3$ или $x+y=4$, причем $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2{,}5 \\ y=1{,}5 \end{cases}$.

Ответ: $\{(2,1)\}$.

107. Очевидно, $m \neq n$.

Рассмотрим $m > n$. Имеем $m! = (n-1)!\,n(n+1)...m$, т.е. $m! = an$, где $a \in N$, $n! = bn$, где $b = (n-1)!$, значит $(n!)^{m!} - (m!)^{n!} = (bn)^{an} - (an)^{bn} = n^n\left(b^{an}n^{an-n} - a^{bn}n^{bn-n}\right)$ делится на $n^n$, следовательно, $28 = 2^2 \cdot 7$ делится на $n^n$, значит $n = 1$ или $n = 2$. Очевидно, $n \neq 1$.

Если $n = 2$, то $2^{m!} - (m!)^2 = 28 \Leftrightarrow 2^k = k^2 + 28$, где $k = m!$.

Если $k > 6$, то $2^k > k^2 + 28$, что невозможно, значит $k \leq 6$, т.е. $m! \leq 6 \Leftrightarrow m = 1; 2; 3$.

Подстановкой убеждаемся, что $m = 3$.

Итак, $n = 2$, $m = 3$.

Если $n > m$, тогда аналогичными рассуждениями получаем, что $m^m$ делит 28, т.е. $m = 1$ или $m = 2$. Если $m = 1$, то $n! = 29$, что невозможно. Если $m = 2$, то $(n!)^2 - 2^{n!} = 28 \Leftrightarrow l^2 - 2^l = 28$, где $l = n!$ ($l \geq 2$, так как $n > 1$). Однако $l^2 - 2^l \leq 0$ для любого $l \geq 1$.

Получено противоречие.

Ответ: $\{m = 3, n = 2\}$.

108. Так как $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, $\sqrt{1999} - \sqrt{1998} = \dfrac{1}{\sqrt{1999} + \sqrt{1998}}$, то, согласно условию имеем $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = \left(\sqrt{1999} + \sqrt{1998}\right)^{1997}$

Пусть $a = \left(\sqrt{1999} + \sqrt{1998}\right)^{1997}$, $b = \left(\sqrt{1999} - \sqrt{1998}\right)^{1997}$.

Заметим, что $ab = 1$.

Имеем $\begin{cases} \sqrt{n} + \sqrt{n-1} = a \\ \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = b \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{n} = a + b \Leftrightarrow n = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 =$

$=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+2ab\right)=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+2\right)=\frac{1}{4}\left(\left(3997+2\sqrt{3994002}\right)^{1997}+\right.$

$\left.+\left(3997-2\sqrt{3994002}\right)^{1997}+2\right)=\left[\begin{matrix}\text{по биному}\\ \text{Ньютона}\end{matrix}\right]=\frac{1}{4}\left(\left(2\cdot 3997^{1997}+4c\right)+\right.$

$\left.+2\right)=c+\dfrac{3997^{1997}+1}{2}=d$, где $c, d\in N$.

Итак, $n=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\in N$.

Покажем, что $n=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ удовлетворяет условию, а именно

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-1}}=b\Leftrightarrow \frac{a+b}{2}-\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-1}=b\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-1}=\frac{a-b}{2}\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2-1=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \quad ab=1,$$ что очевидно.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right.$, где $\left.a, b=\left(\sqrt{1999}\pm\sqrt{1998}\right)^{1997}\right\}$.

109. 1) Имеем $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}=\dfrac{2000^{1999}}{1999^{1999}}$. **(1)**

Так как $n$, $n+1$ взаимно простые числа, то $(n+1)^{n+1}$, $n^{n+1}$ также взаимно просты, значит $\begin{cases}(n+1)^{n+1}=2000^{1999}\\ n^{n+1}=1999^{1999}\end{cases}$ **(2)**

Так как простое 1999 делит $n^{n+1}$, то 1999 делит $n$, значит $n\geq 1999$, тогда $n^{n+1}\geq 1999^{2000}>1999^{1999}$, что противоречит (2).

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2) Так как исходное уравнение неразрешимо в натуральных числах, то $n<0$, т.е. $n=-m$, где $m\in N$, тогда $\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^{-m+1}=\left(1+\dfrac{1}{1999}\right)^{1999}$, причем $\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^{-m+1}=\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{1-m}=$

$=\left(\dfrac{m}{m-1}\right)^{m-1}=\left(1+\dfrac{1}{m-1}\right)^{m-1}=\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k}$, где $k=m-1$, $k\in N$.

Имеем $\dfrac{(k+1)^k}{k^k}=\dfrac{2000^{1999}}{1999^{1999}} \Leftrightarrow \begin{cases}(k+1)^k=2000\\ k^k=1999^{1999}\end{cases}.$ **(3)**

Из (3) заключаем, что $k=1999 \Leftrightarrow$ $m=k+1=2000$, $n=-m=-2000$.

Ответ: $\{-2000\}$.

110. Имеем $2=25-23=\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)=$ $=(x-y)(y-z)(z-x)$, т.е. $(x-y)(y-z)(z-x)=2$. **(1)**

Пусть для определенности $x<y<z$, тогда $x-y<0$, $y-z<0$, $z-x>0$, причем $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$, следовательно, из (1) $\begin{cases}x-y=-1\\ y-z=-1\\ z-x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+1\\ z=x+2\end{cases}$, тогда, согласно условию, $x^2(x+1)+(x+1)^2(x+2)+(x+2)^2x=23 \Leftrightarrow 3x^3+9x^2+9x-21=0 \Leftrightarrow$ $(x-1)\left(3x^2+12x+21\right)=0 \Leftrightarrow x=1$, значит $y=x+1=2$, $z=x+2=3$. Аналогично, если $y<z<x$ или $z<x<y$, получаем $y=1$, $z=2$, $x=3$ или $z=1$, $x=2$, $y=3$. Если $x<z<y$ или $y<x<z$ или $z<y<x$, то $(x-y)(y-z)(z-x)<0$, что противоречит (1).

Ответ: $\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$.

111. 1) Пусть $\left[\sqrt{m}\right]=k$, где $m,k\in N$, тогда $k\le\sqrt{m}<k+1 \Leftrightarrow$ $k^2\le m<(k+1)^2 \Leftrightarrow$ $k^2\le m\le k^2+2k$, следовательно, сумма, состоящая из $(2k+1)$ слагаемого, $\left[\sqrt{k^2}\right]+\left[\sqrt{k^2+1}\right]+\ldots+$ $+\left[\sqrt{k^2+2k}\right]=k+\ldots+k=k(2k+1)$, значит $\left[\sqrt{1}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n^2-1}\right]=$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(2k^2+k\right)=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k=2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+$$

$+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n-1)(4n+1)}{6}$. Покажем, $1^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, тогда $1^2+\ldots+(n-1)^2=\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Имеем $n^3+3n^2+3n=(n+1)^3-1=\left((n+1)^3-n^3\right)+\left(n^3-(n-1)^3\right)+$

$$+\ldots+\left(2^3-1^3\right)=\left(3n^2+3n+1\right)+\left(3(n-1)^2+3(n-1)+1\right)+\ldots+$$

$$+\left(3\cdot 1^2+3\cdot 1+1\right)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n,$$

откуда $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{\left(n^3+3n^2+3n\right)-\frac{3n(n+1)}{2}-n}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Пусть $\left[\sqrt[3]{m}\right]=k$, где $m,k\in N$, тогда $k\le\sqrt[3]{m}<k+1\Leftrightarrow$ $k^3\le m<(k+1)^3\Leftrightarrow$ $k^3\le m\le(k+1)^3-1=k^3+3k^2+3k$, следовательно, сумма, состоящая из $3k^2+3k+1$ слагаемого,

$$\left[\sqrt[3]{k^3}\right]+\left[\sqrt[3]{k^3+1}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{(k+1)^3-1}\right]=k+\ldots+k=k\left(3k^2+3k+1\right),$$

тогда $\displaystyle\left[\sqrt[3]{1}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]=\sum_{k=1}^{n-1}k\left(3k^2+3k+1\right)=\sum_{k-1}^{n-1}\left(3k^3+3k^2+k\right)=$

$$=3\sum_{k=1}^{n-1}k^3+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k=3\frac{n^2(n-1)^2}{4}+3\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}=$$

$=\dfrac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}$. Покажем, что $1^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, тогда $1^3+\ldots+(n-1)^3=\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$.

Имеем $(n+1)^4-1=\left((n+1)^4-n^4\right)+\left(n^4-(n-1)^4\right)+\ldots+\left(2^4-1^4\right)=$

$$=\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)+\left(4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1\right)+\ldots+$$

$$+\left(4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1\right)=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=$$

$=4\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+n$, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{(n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

112. Предположим, исходное уравнение разрешимо в натуральных числах, тогда $16xy-4x-4y+1=4z^2+1\Leftrightarrow$

$$(4x-1)(4y-1)=4z^2+1. \qquad (1)$$

Число $4(x-1)+3$ содержит простой делитель $p$ вида $4k+3$, значит $p=4k+3$ делит $(2z)^2+1$, что противоречит теореме 4.5.

113. Имеем $((2x)^x-1)((2x)^x+1)=y^{z+1}$, причем нечетные числа $(2x)^x\pm1$ взаимно просты. Действительно, предположим, простое $p$ делит $(2x)^{2x}\pm1$, тогда $p$ делит $2=((2x)^x+1)-((2x)^x-1)$, что невозможно, значит, согласно условию, имеем $\begin{cases}(2x)^x-1=a^{z+1}\\(2x)^x+1=b^{z+1}\end{cases}$, где $a, b$ нечетные натуральные числа, тогда $b^{z+1}-a^{z+1}=2 \Leftrightarrow$ $(b-a)(b^z+b^{z-1}a+...+ba^{z-1}+a^z)=2$, значит $b-a=1$ или $b-a=2$, однако $a, b$ нечетные числа, значит $b-a=2$, тогда $2=b^{z+1}-a^{z+1}=(a+2)^{z+1}-a^{z+1}>2^{z+1}\geq4$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

114. Если $p=2$, то $m=1$; если $p=3$, то $m=1$; если $p=5$, то $m=2$. Предположим, $p>5$, тогда $2<\frac{p-1}{2}<p-1$, значит $(p-1)!=1\cdot2\cdot3...\left(\frac{p-1}{2}\right)...(p-1)$ делится на $2\frac{p-1}{2}(p-1)=(p-1)^2$, причем $(p-1)!=p^m-1$, значит $(p-1)$ делит $p^m-1=$ $=(p-1)(p^{m-1}+...+p+1)$, т.е. $p-1$ делит $p^{m-1}+...+p+1=$ $=(p^{m-1}-1)+...+(p-1)+m$, значит $p-1$ делит $m$,ибо $p-1$ делит $p^k-1$ для любого натурального значения $k$, следовательно, $m\geq p-1$.

Имеем $p^m\geq p^{p-1}=((p-1)+1)^{p-1}>(p-1)^{p-1}+1>1\cdot2\cdot...\cdot(p-1)+$ $+1=(p-1)!+1$, что противоречит условию.

Ответ: $\{(2, 1), (3, 1), (5, 2)\}$.

115. 1-й способ.

Имеем $y^3=8(x^3+3x^2+4x+2)$, значит $y=2z$, где $z\in Z$, тогда

$$z^3=x^3+3x^2+4x+2. \qquad (1)$$

Предположим, $x\geq0$, тогда $(x+1)^3<x^3+3x^2+4x+2<(x+2)^3$, значит $(x+1)^3 < z^3 < (x+2)^3 \Leftrightarrow x+1 < z < x+2$, что невозможно.

Предположим, $x \le -2$. Пусть $s = -x-2$, тогда $s \ge 0$, причем $(x+2)^4 - x^4 = (-s)^4 - (-s-2)^4 = s^4 - (s+2)^4$, значит, согласно условию, $s^4 - (s+2)^4 = y^3 \Leftrightarrow 8(s^3 + 3s^2 + 4s + 2) = (-y)^3$, значит $(-y) = 2t$, где $t \in Z$, следовательно, $s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = t^3$, где $s \ge 0$, что невозможно (см. выше).

Итак, $x = -1$, тогда $y = 0$.

2-й способ.

Аналогично предыдущему способу имеем $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = z^3$, где $y = 2z$, тогда $(x+1)^3 + (x+1) = z^3 \Leftrightarrow t^3 + t = z^3$, где $t = x+1$.

Имеем $t(t^2+1) = z^3$, причем $t, t^2+1$ взаимно просты, значит $t = a^3$, $t^2 + 1 = b^3$, $z = ab$, где $a, b \in Z$, тогда $a^6 + 1 = b^3 \Leftrightarrow$ $b^3 - c^3 = 1$, где $c = a^2 \ge 0$. Имеем $(b-c)(b^2 + bc + c^2) = 1$, причем $b^2 + bc + c^2 = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 \ge 0$, значит $\begin{cases} b - c = 1 \\ b^2 + bc + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b = c+1 \\ (c+1)^2 + c(c+1) + c^2 = 1 \\ c \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$, $a^2 = c = 0$, $a = 0$, $z = ab = 0$,

$t = a^3 = 0$, $x = t - 1 = -1$, $y = 0$.

3-й способ.

Аналогично предыдущему способу получаем $t^3 + t = z^3$, где $y = 2z$, $x + 1 = t$; $t, z \in Z$.

Если $t = 0$, то $z = 0$, т.е. $x = -1$, $y = 0$.

Предположим, $t \ne 0$. Имеем $t = z^3 - t^3 = (z-t)(z^2 + zt + t^2)$, значит $z^2 + zt + t^2$ делит $t$, тогда $z^2 + zt + t^2 \le |t|$. **(2)**

Так как $t(t^2+1) = z^3$, то $z, t$ имеют одинаковый знак, значит $zt > 0$. Так как $t \ne 0$, то $|t| \ge 1$, значит $z^2 + zt + t^2 > z^2 + t^2 \ge t^2 \ge |t|$, т.е. $z^2 + zt + t^2 > |t|$, что противоречит (2).

Ответ: $\{(-1, 0)\}$.

116. Имеем $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y \Leftrightarrow 4x^2+4x+1=$ $=4y^4+4y^3+4y^2+4y+1 \Leftrightarrow (2x+1)^2=4y^4+4y^3+4y^2+4y+1$.

Заметим, что $(2y^2+y)^2<4y^4+4y^3+4y^2+4y+1<(2y^2+y+1)^2$ для любого $y\le -2$ или $y\ge 3$, тогда $(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<$ $<(2y^2+y+1)^2 \Leftrightarrow |2y^2+y|<|2x+1|<|2y^2+y+1|$, что невозможно, так как целое число $|2x+1|$ не может находиться между двумя последовательными целыми числами.

Итак, $y=-1;0;1;2$, таким образом, находим следующие решения: $(x,y)=\{(0,-1),(-1,-1),(0,0),(-1,0),(5,2),(-6,2)\}$.

Ответ: $\{(0,-1),(-1,-1),(0,0),(-1,0),(5,2),(-6,2)\}$.

117. Если $x=0$, то $y=\pm 4$. Предположим, $x\ne 0$.

Имеем $(y-x-4)(y+x+4)=x^3$. **(1)**

Пусть $d=(y-x-4,\ y+x+4)$.

Предположим, $d$ имеет простой нечетный делитель $p$, тогда $p$ делит $y\pm(x+4)$, значит $p$ делит $(y+x+4)-(y-x-4)=$ $=2x+8=2(x+4)$ и так как $p$ нечетно, то $p$ делит $x+4$. Так как $p$ делит $y+x+4$, то из (1) $p$ делит $x^3$, т.е. $p$ делит $x$, следовательно, $p$ делит $(x+4)-x=4$, что невозможно, так как $p$ нечетное простое число.

Итак, $d=1$ либо $d=2^s$, где $s\in N$.

Предположим, $s\ge 4$, т.е. $d$ делится на 16, тогда 16 делит $(y+x+4)-(y-x-4)=2(x+4)$, т.е. 8 делит $x+4$. Так как 16 делит числа $y\pm(x+4)$, то из (1) заключаем $16^2=2^8$ делит $x$, т.е. 8 делит $x$, значит 8 делит $(x+4)-x=4$, что невозможно.

Итак, $d=1;2;4;8$.

Рассмотрим $d=1$, тогда из (1) $\begin{cases} y-x-4=a^3 \\ y+x+4=b^3 \\ x=ab \end{cases}$, где $a,b\in Z$,

значит $2ab+8=b^3-a^3$. **(2)**

Если $a=b$, то из (2) $a^2=-4$, что невозможно.

Если $a=0$, то $b=2$, т.е. $\begin{cases} y-x-4=0 \\ y+x+4=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=0 \end{cases}$.

Если $b=0$, то $a=-2$, т.е. $\begin{cases} y-x-4=-8 \\ y+x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4 \\ x=0 \end{cases}$

Пусть $ab \neq 0$.

Если $a>0$, $b<0$, то $a^3-b^3+2ab+8=a^3+(-b)^3+2ab+8 \geq$ $\geq a^2+(-b)^2+2ab+8=(a+b)^2+8>0$, что противоречит (2).

Если $a<0$, $b>0$, то $b^3=a^3+2ab+8<0+0+8=8$, т.е. $b<2$, причем $b>0$, значит $b=1$, тогда $a^3+2a+7=0$, $a$ делит 7, т.е. $a=\pm 1; \pm 7$, что невозможно.

Если $ab>0$, то из (2) имеем $2ab+8=(b-a)(a^2+ab+b^2)$, значит $2ab+8$ делится на $a^2+ab+b^2$, следовательно,
$$2ab+8 \geq a^2+ab+b^2 \Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} (2a-b)+3b^2 \leq 32 \\ (2b-a)^2+3a^2 \leq 32 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 3a^2 \leq 32 \\ 3b^2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| \leq 3 \\ |b| \leq 3 \end{cases}.$$

Подстановкой убеждаемся, что значения $a, b=\pm 1; \pm 2; \pm 3$ не удовлетворяют (2).

Рассмотрим $d=2$, тогда из (1) заключаем $x$ четное число, т.е. $x=2c$, тогда $\dfrac{y-x-4}{2}\dfrac{y+x+4}{2}=2c^3$, причем $\left(\dfrac{y-x-4}{2}, \dfrac{y+x+4}{2}\right)=1$ (так как $d=2$), значит $\dfrac{y-x-4}{2}=a^3$, $\dfrac{y+x+4}{2}=2b^3$ или $\dfrac{y-x-4}{2}=2b^3$, $\dfrac{y+x+4}{2}=a^3$, где $a, b \in Z$, причем $a^3 \cdot 2b^3=2c^3$, т.е. $c=ab$, следовательно, $x+4=\dfrac{y+x+4}{2}-\dfrac{y-x-4}{2}=\pm(a^3-2b^3)$, $x=2c=2ab$.

Итак, $2ab+4=\pm(a^3-2b^3)$, значит $a=2m$, $m \in Z$, тогда $2mb+2=\pm(4m^3-b^3)$, значит $b=2n$, $n \in Z$, тогда $2mn+1=\pm 2(m^3-2n^3)$, что невозможно.

Рассмотрим $d=4$, тогда из (1) заключаем, что $4^2$ делит $x^3$, значит 4 делит $x$, т.е. $x=4c$, тогда $\frac{y-x-4}{4}\frac{y+x+4}{4}=4c^3$, причем $\left(\frac{y-x-4}{4},\frac{y+x+4}{4}\right)=1$ (так как $d=4$), значит $\frac{y-x-4}{4}=a^3$, $\frac{y+x+4}{4}=4b^3$ или $\frac{y-x-4}{4}=4b^3$, $\frac{y+x+4}{4}=a^3$, где $a,b$ целые числа, $4c^3=a^3\cdot 4b^3$, т.е. $c=ab$, следовательно, $\frac{x+4}{2}=\pm\left(a^3-4b^3\right)$, причем $x=4c=4ab$, значит $2ab+2=\pm\left(a^3-4b^3\right)$, следовательно, $a=2m$, $m\in Z$, тогда $2mb+1=\pm 2\left(2m^3-b^3\right)$, что невозможно.

Рассмотрим $d=8$, тогда из (1) заключаем, $2^6=8^2$ делит $x^3$, значит 4 делит $x$, т.е. $x=4c$, тогда $\frac{y-x-4}{8}\frac{y+x+4}{8}=c^3$, причем $\left(\frac{y-x-4}{8},\frac{y+x+4}{8}\right)=1$ (так как $d=8$), значит $\frac{y-x-4}{8}=a^3$, $\frac{y+x+4}{8}=b^3$, $c^3=a^3b^3$, где $a,b$ целые числа, тогда $8b^3-8a^3=(y+x+4)-(y-x-4)=2x+8=8c+8=8ab+8$, т.е.

$$b^3-a^3=ab+1. \qquad (3)$$

Если $a=0$, то $b=1$, тогда $x=0$, $y=4$.

Если $b=0$, то $a=-1$, тогда $x=0$, $y=-4$.

Пусть $ab\neq 0$.

Если $a<0$, $b>0$, то $b^3-a^3-ab=b^3+(-a)^3+(-a)b\geq$ $\geq 1+1+1=3>1$, что противоречит (3).

Если $a>0$, $b<0$, то $a^3-b^3+ab+1=\left(a^3+(-b)^3+1\right)+ab\geq$ $\geq 3\sqrt[3]{a^3(-b)^3 1}+ab=-2ab>0$, что противоречит (3).

Если $ab>0$, то из (3) $(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)=ab+1$. **(4)**

значит $a^2-ab+b^2$ делит $ab+1$, следовательно, $a^2-ab+b^2\leq$ $\leq ab+1 \Leftrightarrow |a-b|\leq 1$, т.е. $a-b=0;\pm 1$.

Если $a-b=0$, то из (4) $ab=-1$, что невозможно (по предположению $ab>0$).

Если $a-b=1$, то из (4) $-\left(a^2+ab+b^2\right)=ab+1 \Leftrightarrow \ (a+b)^2=-1$, что невозможно.

Если $a-b=-1$, то $b=a+1$, из (3) $(a+1)^3-a^3=a(a+1)+1 \Leftrightarrow$ $a=0$ или $a=-1$, однако $ab>0$, значит $a=-1$, $b=a+1=0$, тогда $ab=0$, что невозможно.

Ответ: $\{(0,\pm 4)\}$.

118. Имеем $p(p+1)+q(q+1)=n(n+1) \Leftrightarrow$

$$p(p+1)=(n-q)(n+q+1), \tag{1}$$

значит $n-q>0$, т.е. $n>q$.

Так как простое $p$ делит $(n-q)(n+q+1)$, то $p$ делит $n-q$ или $p$ делит $n+q+1$.

Если $p$ делит $n-q$, то $p\le n-q$, $p+1\le n-q+1$, тогда $p(p+1)\le (n-q)(n-q+1)<(n-q)(n+q+1)$, что противоречит (1).

Итак, $p$ делит $n+q+1$, т.е. $n+q+1=pk$, где $k\in N$, тогда из (1) $p+1=k(n-q)$.

Если $k=1$, то $\begin{cases} p+1=n-q \\ p=n+q+1 \end{cases} \Rightarrow \quad n-q-1=n+q+1=p \Rightarrow$ $q=-1$, что невозможно, следовательно, $k\ge 2$.

Имеем $2q=(n+q)-(n-q)=(pk-1)-(n-q)=(k(k(n-q)-1)-$ $-1)-(n-q)=\left(k^2-1\right)(n-q)-(k+1)=(k+1)((k-1)(n-q)-1)$. **(2)**

Так как $2q$ имеет делители 1, 2, $q$, $2q$, $k+1\ge 3$, то $k+1=q$ или $k+1=2q$ (из (2)).

Если $k+1=q$, то из (2) $(k-1)(n-q)=3$, т.е. $(q-2)(n-q)=3 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} q-2=1 \\ n-q=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} q-2=3 \\ n-q=1 \end{cases}$, т.е. $q=3$, $n=6$, $p=k(n-q)-1=$ $=(q-1)(n-q)-1=5$ или $q=5$, $n=6$, $p=3$.

Если $k+1=2q$, то из (2) $(k-1)(n-q)=2$, значит $(2q-2)(n-q)=2 \Leftrightarrow \quad (q-1)(n-q)=1 \Leftrightarrow \quad q-1=1, \quad n-q=1$, т.е. $q=2$, $n=3$, $p=2$.

Ответ: $\{(p,q,n)=(2,2,3),(3,5,6),(5,3,6)\}$.

119. Если $n=2$, то $\dfrac{1}{x_1+\dfrac{1}{x_2}}+\dfrac{1}{2}=1 \Leftrightarrow \quad x_1+\dfrac{1}{x_2}=2$, значит $x_2$ делит 1, т.е. $x_2=1$, $x_1=1$.

Пусть $n>2$ и пусть $a=\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\ldots\dfrac{1}{n}}}$, очевидно, $0<a<1$, тогда

$$\frac{1}{x_1+\dfrac{1}{x_2+\ldots\dfrac{1}{x_n}}}=1-\frac{1}{2+\dfrac{1}{3+\ldots\dfrac{1}{n}}}=1-\frac{1}{2+a}=\frac{a+1}{a+2}=\frac{1}{\dfrac{a+2}{a+1}}=$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{1}{a+1}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\ldots\dfrac{1}{n}}}},$$ следовательно, $x_1=1$, $x_2=1$,

$x_3=3$, $x_4=4$, …, $x_n=n$. Действительно, покажем, что если $\dfrac{1}{x_1+\dfrac{1}{x_2+\ldots\dfrac{1}{x_n}}}=\dfrac{1}{y_1+\dfrac{1}{y_2+\ldots\dfrac{1}{y_n}}}$, где $x_i, y_i \in N$, то $x_i=y_i$;

$i=1,2,\ldots,n$.

При $n=1$ утверждение очевидно.

Предположим, исходное утверждение справедливо для $k$ и докажем для $(k+1)$. Пусть $\dfrac{1}{x_2+\ddots+\dfrac{1}{x_k}}=a$, $\dfrac{1}{y_2+\ddots+\dfrac{1}{y_k}}=b$, тогда

$\dfrac{1}{x_1+a}=\dfrac{1}{y_1+b} \Leftrightarrow \quad x_1-y_1=b-a$. Очевидно, $0<a<1$, $0<b<1$, значит $-1<b-a<1$, т.е. $-1<x_1-y_1<1$, тогда $x_1-y_1=0$, т.е.

$x_1 = y_1$, значит $a = b \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_2 + \ddots + \dfrac{1}{x_k}} = \dfrac{1}{y_2 + \ddots + \dfrac{1}{y_k}} \Leftrightarrow$

$x_2 = y_2, \ldots, x_k = y_k$ (по предположению).

Итак, $x_i = y_i$; $i = 1, 2, \ldots, k+1$, что и требовалось доказать.

Ответ: если $n = 2$: $\{(1, 1)\}$;

если $n > 2$: $\{(1, 1, 3, 4, \ldots, n)\}$.

120. Заметим, $(m+1)(m+2)\ldots(m+m) = \dfrac{(2m)!}{m!} =$

$$= \frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-1))(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2m))}{(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m)} = (1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-1))2^m,$$

значит, согласно условию, имеем $1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m-1) = 2^{2^{n-1}} + 1$. **(1)**

Если $n = 1$, то, очевидно, $m = 2$. Заметим, что $n \neq 2$.

Предположим, $n > 1$. Покажем, $2^{2^k} + 1$ оканчивается цифрой 7, если $k > 1$. Действительно, $2^{2^k} + 1 = \left(2^{2^k} + 4\right) - 3 = 4\left(2^{2^k - 2} + 1\right) - 3 =$

$= 4\left(4^{2^{k-1}-1} + 1\right) - 3 = 4\left((5-1)^{2l+1} + 1\right) - 3 = 4((5a-1)+1) - 3 =$

$= 10(2a-1) + 7$, что и требовалось доказать.

Итак, если $n > 2$, то $2^{2^{n-1}} + 1$ оканчивается цифрой 7, причем $2^{2^{n-1}} + 1 \geq 7$ (так как $n \geq 3$), значит $1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m-1) \geq 7$, следовательно, $m \geq 3$, тогда $1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-1)$ оканчивается цифрой 5, что противоречит (1).

Ответ: $\{(m, n) = (2, 1)\}$.

121. Имеем $\begin{cases} x = (y^2 - 1)^{x-y} = a^{x-y} & \textbf{(1)} \\ y = (x^2 - 7)^{x-y} = b^{x-y} & \textbf{(2)} \end{cases}$,

где $a = y^2 - 1$, $b = x^2 - 7$.

Если $y = 1$, то из (1) $x = 0$, что невозможно, тогда из (2) $x - y > 0$, причем $y \geq 2$, значит $x > y \geq 2$, т.е. $x \geq 3$. Пусть $x - y = z$, тогда из (1), (2) $a^z - b^z = z$, следовательно, $a > b$, т.е.

$a \ge b+1$, тогда $a^z - b^z \ge (b+1)^z - b^z \ge 1 + bz > z$ для любого целого значения $z \ge 2$, следовательно, $z = 1$, т.е. $x - y = 1$, тогда из (1), (2) $\begin{cases} x = y^2 - 1 \\ y = x^2 - 7 \end{cases}$, значит $x = y + 1 = y^2 - 1 \Leftrightarrow$ $y = 1$ или $y = 2$, тогда $x = y + 1 = 2$ или $x = 3$ соответственно, однако $y \ne 1$, значит $x = 3$, $y = 2$.

Ответ: $\{(3, 2)\}$.

122. Так как $x(x+1)$ четно, то $x(x+1) = 2z$, где $z \in Z$. Имеем $2z(2z+2) = 2y^2 \Leftrightarrow$ $2z(z+1) = y^2$, значит $y = 2t$, $t \in Z$, тогда $z(z+1) = 2t^2$.

Заметим, что $z$, $z+1$ взаимно простые числа. Если $z$ четно, то $\frac{z}{2}(z+1) = t^2$, причем $\left(\frac{z}{2}, z+1\right) = 1$, значит $\left|\frac{z}{2}\right| = a^2$, где $a \in Z$, тогда $\left|\frac{x(x+1)}{4}\right| = a^2 \Leftrightarrow$ $|x(x+1)| = (2a)^2$, следовательно, $x = 0$ или $x = -1$, $y = 0$ (см. № 105).

Если $z+1$ четно, то $z\frac{z+1}{2} = t^2$, причем $\left(z, \frac{z+1}{2}\right) = 1$, значит $\left|\frac{z+1}{2}\right| = b^2$, где $b \in Z$, следовательно, $|x^2 + x + 4| = (2b)^2 \Leftrightarrow$ $x^2 + x + 4 = (2b)^2$. Если $x > 3$, то $x^2 < x^2 + x + 4 < (x+1)^2$, т.е. $x^2 < (2b)^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow$ $x < |2b| < x + 1$, что невозможно.

Если $x < -4$, то $(x+1)^2 < x^2 + x + 4 < x^2$, т.е. $(x+1)^2 < (2b)^2 < x^2 \Leftrightarrow$ $|x+1| < |2b| < |x|$, что невозможно. Итак, $-4 \le x \le 3$, таким образом, получаем следующие решения: $\{(1, \pm 2), (-2, \pm 2), (0, 0), (-1, 0)\}$.

Ответ: $\{(1, \pm 2), (-2, \pm 2), (0, 0), (-1, 0)\}$.

123. Имеем $x! + 1 = (x+1)(y+1)$, тогда $(p-1)! + 1 = p(y+1)$, где $p = x + 1$, т.е. $p$ делит $(p-1)! + 1$.

Согласно теореме Вильсона, $p$ простое число, значит $x = p - 1$,

$$y=\frac{(p-1)!+1}{p}-1.$$

Ответ: $\left\{\left(p-1,\frac{(p-1)!+1}{p}-1\right): p\ \textit{простое}\right\}$.

2) Лемма: $p$ простое тогда и только тогда, когда $p$ делит $(p-2)!-1$.

Доказательство.

Имеем $(p-1)((p-2)!-1)=((p-1)!+1)-p$, следовательно, согласно теореме Вильсона, $p$ простое тогда и только тогда, когда $p$ делит $(p-2)!-1$.

Лемма доказана.

Имеем $(x-1)!-1=(x+1)(y-1)\Leftrightarrow \quad (p-2)!-1=p(y-1)$, где $p=x+1$.

Так как $p$ делит $(p-2)!-1$, то, согласно лемме, $p$ простое, причем $y=\frac{(p-2)!-1}{p}+1$.

Ответ: $\left\{\left(p-1,\frac{(p-2)!-1}{p}+1\right): p\ \textit{простое}\right\}$.

124. 1) Пусть $k=499$, тогда, согласно условию, имеем $(4k+2)^x-(4k+1)^x=y^2$. Если $x=1$, то $y=1$.

Предположим, $x\geq 2$, тогда $y^2=(4k+2)^x-(4k+1)^x=$ $=4a-(4b+1)=4(a-b-1)+3$, т.е. $y^2$ при делении на 4 дает в остатке 3, что невозможно.

Ответ: $\{(1,1)\}$.

2) Пусть $k=499$, тогда $(4k+3)^x-(4k+2)^x=y^2$.

Если $x=1$, то $y=1$. Предположим, $x\geq 2$.

Если $x$ нечетно, тогда $y^2=(4k+3)^x-(4k+2)^x=(4a+3)-4b=$ $=4(a-b)+3$, т.е. $y^2$ при делении на 4 дает в остатке 3, что невозможно.

Если $x$ четное число, т.е. $x=2l$, $l\in N$, тогда $1999^{2l}-1998^{2l}=y^2$. Очевидно, $y$ нечетное число, тогда имеем

$$\frac{1999^l-y}{2}\frac{1999^l+y}{2}=\frac{1998^{2l}}{4}=2^{2l-2}3^{6l}37^{2l}. \qquad \textbf{(1)}$$

Предположим, существует простое $p$, которое делит числа $\frac{1999^l \pm y}{2}$, тогда $p$ делит $\frac{1999^l+y}{2}+\frac{1999^l-y}{2}=1999^l$, т.е. $p=1999$.

Так как $p$ делит $\frac{1999^l+y}{2}$, то из (1) $p$ делит $2^{2l-2}3^{6l}37^{2l}$, т.е. $p=2$ или $p=3$ или $p=37$. Получено противоречие.

Итак, числа $\frac{1999^l \pm y}{2}$ взаимно просты, значит из (1) находим

$$\begin{cases}\frac{1999^l-y}{2}=1; \qquad 2^{2l-2}; \qquad 3^{6l}; \qquad 37^{2l}\\ \frac{1999^l+y}{2}=\frac{1998^{2l}}{4}; 27^{2l}37^{2l}; 2^{2l-2}37^{2l}; 2^{2l-2}3^{6l}\end{cases}$$

ибо $\frac{1999^l-y}{2}<\frac{1999^l+y}{2}$, тогда

$$1999^l=\frac{1999^l+y}{2}+\frac{1999^l-y}{2}=1+\frac{1998^{2l}}{4};\ 2^{2l-2}+27^{2l}37^{2l};$$

$3^{6l}+2^{2l-2}37^{2l}$; $37^{2l}+2^{2l-2}3^{6l}$, однако

$$1999^l<\left(999^2\right)^l\le 999^{2l}2^{2l-2}<\frac{1998^{2l}}{4}+1;$$

$1999^l<\left(27^2 37^2\right)^l<27^{2l}37^{2l}+2^{2l-2}$. Заметим, что $1999<3^6+37^2$;

если $l>1$, то $4<\left(\frac{4\cdot 37^2}{1999}\right)^l \Leftrightarrow 1999^l<2^{2l-2}37^{2l}<2^{2l-2}37^{2l}+3^{6l}$;

если $l=1;2;3$, то $1999^l\ne 37^{2l}+2^{2l-2}3^{6l}$; если $l\ge 4$, то

$$\left(\frac{4\cdot 3^6}{1999}\right)^l>4 \Leftrightarrow 1999^l<2^{2l-2}3^{6l}<2^{2l-2}3^{6l}+37^{2l}.$$

Получено противоречие.

Ответ: $\{(1,1)\}$.

125. 1) Имеем $x^4+x^2+1=1999^y \Leftrightarrow$

$$\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)=1999^y. \qquad \textbf{(1)}$$

Так как 1999 нечетное число, то $x^2 \pm x + 1$ также нечетные числа. Предположим, существует нечетный простой делитель $p$ чисел $x^2 \pm x + 1$, т.е. $p$ делит $x^2 \pm x + 1$, тогда $p$ делит $(x^2+x+1)-(x^2-x+1)=2x$, значит $p$ делит $x$, тогда $p$ делит $1=(x^2+x+1)-x(1+x)$, что невозможно. Итак, $x^2 \pm x+1$ взаимно просты, причем их произведение есть степень простого числа 1999 (см. (1)), значит $x^2+x+1=\pm 1$ или $x^2-x+1=\pm 1$, т.е. $x=\pm 1$ или $x=0$ и так как $x>0$, то $x=1$, следовательно, $1999^y=3$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2) Имеем $x^5+x^4+1=3^y \Leftrightarrow (x^3-x+1)(x^2+x+1)=3^y$. **(2)**

Так как 3 нечетное число, то $x^3-x+1$, $x^2+x+1$ также нечетные числа. Предположим, существует нечетное простое $p$, которое делит $x^2-x+1$, $x^2+x+1$. Тогда $p$ делит $x(x^2+x+1)-(x^3-x+1)=x^2+2x-1$, значит $p$ делит $(x^2+2x-1)-$ $-(x^2+x+1)=x-2$, $p$ делит $(x^2+x+1)-x(x-2)=3x+1$, $p$ делит $(3x+1)-3(x-2)=7$, следовательно, $p=7$.

Из (2) заключаем, что $3^y$ делится на $p^2$, т.е. $3^y$ делится на 49, что невозможно. Итак, $x^2-x+1$ и $x^2+x+1$ взаимно просты, причем произведение этих чисел есть степень простого числа 3, следовательно, $x^3-x+1=1$ или $x^2+x+1=1$, причем $x \in N$, значит $x=1$, тогда $3^y=3$, $y=1$.

Ответ: $\{(1,1)\}$.

126. Если $m=0$, то $n=0$. Если $n=0$, то $m=0$.

Предположим $mn \neq 0$. Если $m>0$, то $n>0$. Если $m<0$, то $n<0$. Пусть для определенности $m>0$, $n>0$. Пусть целые числа $a_k, b_k, c_k, d_k$ таковы, что $a_k+b_k\sqrt{2}=(5+3\sqrt{2})^k$, $c_k+d_k\sqrt{2}=(3+5\sqrt{2})^k$, где $k \in N$. Согласно условию, имеем $a_m+b_m\sqrt{2}=c_n+d_n\sqrt{2} \Leftrightarrow a_m-c_n=\sqrt{2}(d_n-b_m)$.

Если коэффициент при $\sqrt{2}$ не равен нулю, то $\sqrt{2}$ является рациональным числом, что невозможно. Итак, $d_n=b_m$, значит $a_m=c_n$.

Имеем $a_k+b_k\sqrt{2}=(a_{k-1}+b_{k-1})(5+3\sqrt{2})=(5a_{k-1}+6b_{k-1})+$ $+(5b_{k-1}+3a_{k-1})\sqrt{2}$, значит $a_k=5a_{k-1}+6b_{k-1}$, $b_k=5b_{k-1}+3a_{k-1}$, следовательно, $(a_{k-1}-b_{k-1}\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})=(5a_{k-1}+6b_{k-1})-$ $-\sqrt{2}(5b_{k-1}+3a_{k-1})=a_k-b_k\sqrt{2}$.

Итак, $a_k-b_k\sqrt{2}=(5-3\sqrt{2})^k$.

Аналогично $c_k-d_k\sqrt{2}=(3-5\sqrt{2})^k$.

Так как $a_m=c_n$, $b_m=d_n$, то $a_m-\sqrt{2}b_m=c_n-\sqrt{2}d_n \Leftrightarrow$ $(5-3\sqrt{2})^m=(3-5\sqrt{2})^n$, что невозможно, ибо $|5-3\sqrt{2}|^m<1<|3-5\sqrt{2}|^n$.

Ответ: $\{(0,0)\}$.

127. Если $x=1;2;3;4$, то $y^z=1;3;9;33$, следовательно, $x=y=1$ или $x=y=3$, $z=2$.

Предположим, $x>4$, тогда $1!+\ldots+x!=33+(5!+\ldots+x!)=33+5k=$ $=5(k+6)+3$, т.е. $y^z=5(k+6)+3$, следовательно, $z\neq 2$, так как $y^2$ при делении на 5 дает в остатке 0;1; 4.

Действительно, $(5m)^2=5(5m^2)+0$; $(5m\pm1)^2=5(5m^2\pm2m)+1$; $(5m\pm2)^2=5(5m^2\pm2)+4$.

Итак, $z\geq 3$. Заметим, что при $x=5;6;7;8$ число $1!+\ldots+x!$ делится на 3, но не делится на 27, следовательно, $1!+\ldots+x!\neq y^z$, где $z\geq 3$.

Если $x\geq 9$, то $1!+\ldots+x!=(1!+\ldots+8!)+(9!+\ldots+x!)=$ $=41993+9!(1+10+10\cdot11+\ldots+10\cdot11\ldots x)=41993+9!l=41993+27n$ делится на 3, но не делится на 27, что невозможно.

Ответ: $\{(1,1,z),(3,3,1): z\in N, z>1\}$.

128. Предположим, что существует целое $n$ $(n\neq 0)$ такое, что корни исходного уравнения являются рациональными числами, тогда необходимо, чтобы дискриминант был полным квадратом.

Имеем $(n^2-n)^2-4n=d^2$ (d – целое число)

$$\Leftrightarrow (n^2-n-d)(n^2-n+d)=4n. \qquad (1)$$

Так как $(n^2-n+d)-(n^2-n-d)=2d$, то числа $n^2-n\pm d$ одинаковой четности, и так как их произведение есть четное число, то и сами они обязаны быть четными числами. Пусть $n^2-n+d=2m$, $n^2-n-d=2k$, где $m$, $k$ целые, тогда из (1) $(2m)(2k)=4n$, т.е. $n=mk$, причем $2m+2k=$ $=(n^2-n+d)+(n^2-n-d)\Leftrightarrow$ $n^2-n=m+k$, следовательно, $m^2k^2-mk=m+k\Leftrightarrow$ $\begin{cases}m(mk^2-k-1)=k\\ k(m^2k-m-1)=m\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}m\ \textit{делит}\ k\\ k\ \textit{делит}\ m\end{cases}$, значит $m=\pm k$.

Если $m=k$, то $m^4-m^2-2m=0$ ($m\neq 0$, ибо $n=mk$, $n\neq 0$), значит $m^3-m-2=0$, тогда $m$ делит 2, т.е. $m=\pm 2;\pm 1$, однако числа $m=\pm 1;\pm 2$ не являются решениями уравнения $m^3-m-2=0$.

Получено противоречие.

Если $k=-m$, тогда $m^4+m^2=0\Leftrightarrow$ $m=0$, что невозможно, так как $n=mk$, $n\neq 0$.

Что и требовалось доказать.

129. 1) 1-й способ.

Если $x=1$, то $y=0$. Если $x=2$, то $y=1$.

Предположим, $x\geq 3$, тогда, $3^y+1=2^x$ делится на 8. Если $y=2k+1$, то $3^y+1=3(8+1)^k+1=3(8a+1)+1=24a+4$ не делится на 8. Если $y=2k$, то $3^y+1=(8+1)^k+1=(8a+1)+1=8a+2$ не делится на 8.

Ответ: $\{(2,1)\}$.

2-й способ.

Имеем $2^x-1=3^y$, тогда $2^x-1$ делится на 3.

Если $x=2k+1$, то $2^x-1=2(3+1)^k-1=2(3a+1)-1=6a+1$ не делится на 3. Итак, $x=2k$, тогда $2^{2k}-1=3^y\Leftrightarrow$ $(2^k-1)(2^k+1)=3^y$, значит $\begin{cases}2^k-1=3^m\\ 2^k+1=3^n\end{cases}$, где $n>m\geq 0$; $m,n\in Z$, тогда $3^n-3^m=2 \Leftrightarrow 3^m(3^{n-m}-1)=2$, следовательно, $3^m$ делит 2, т.е. $m=0$, тогда $3^n-1=2$, $n=1$, $y=m+n=1$, $x=2$.

Ответ: $\{(2,1)\}$.

2) Если $y=1$, то $x=1$. Если $y=2$, то $3^x=5$, что невозможно. Если $y=3$, то $x=2$.

Предположим, $y>3$, тогда $3^x-1=2^y$ делится на 8. Если $x=2k+1$, то $3^{2k+1}-1=3(8+1)^k-1=3(8a+1)-1=24a+2$ не делится на 8. Если $x=2k$, то $2^y=3^x-1=(3^k-1)(3^k+1)$, значит $\begin{cases}3^k-1=2^m\\3^k+1=2^n\end{cases}$, где целые $m$, $n$ таковы, что $n>m\geq 0$, $n+m=y$.

Имеем $2^n-2^m=2 \Leftrightarrow 2^m(2^{n-m}-1)=2$, следовательно, $2^m$ делит 2, т.е. $m=0$ или $m=1$.

Если $m=1$, то $n=2$, $y=m+n=3$, $x=2$.

Если $m=0$, то $2^n=3$, что невозможно.

Ответ: $\{(1,1),(2,3)\}$.

3) Если $y=1$, то $5^x=3$, что невозможно.

Если $y=2$, то $x=1$. Предположим, $y>2$. Имеем $2^y+1=5^x$ делится на 5.

$2^{4k+1}+1=2(15+1)^k+1=2(15a+1)+1=30a+3$ не делится на 5; $2^{4k+3}+1=8(15+1)^k+1=8(15a+1)+1=120a+9$ не делится на 5; $2^{4k}+1=(15+1)^k+1=(15a+1)+1$ не делится на 5; $2^{4k+2}=$ $=4(15+1)^k+1=4(15a+1)+1=60a+5$ делится на 5. Итак, $y=4k+2$, где $k\in N$.

Имеем $5^x-1=4\cdot 16^k$, следовательно, $5^x-1$ делится на 16, значит, $x=4n$, $n\in N$, так как аналогичными рассуждениями получаем, что $5^x-1$ не делится на 16, если $x=4n+1; 4n+2; 4n+3$. Имеем $5^{4n}-1=4\cdot 16^k \Leftrightarrow (5^{2n}-2\cdot 4^k)(5^{2n}+2\cdot 4^k)=1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}5^{2n}-2\cdot 4^k=1\\5^{2n}+2\cdot 4^k=1\end{cases} \Rightarrow 4^k=0,\text{ что невозможно.}$$

Ответ: $\{(1,2)\}$.

4) Если $y=1$, то $7^x=3$, что невозможно.

Если $y>1$, то $7^x-1=2^y$ делится на 4.

Если $x=2k+1$, то $7^x-1=7(48+1)^k-1=7(48a+1)-1=$ $=336a+6$ не делится на 4.

Если $x=2k$, то $7^{2k}-1=2^y \Leftrightarrow (7^k-1)(7^k+1)=2^y \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 7^k-1=2^m \\ 7^k+1=2^n \end{cases}$, где $m$, $n$ таковы, что $n>m\geq 0$, $m+n=y$.

Имеем $2^n-2^m=2 \Leftrightarrow 2^m(2^{n-m}-1)=2$, значит $2^m$ делит 2, т.е. $m=0$ или $m=1$.

Если $m=0$, то $2^n=3$, что невозможно.

Если $m=1$, то $n=2$, $y=m+n=3$, $7^x=9$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

130. Если $y=1$, то $x=1$. Предположим, $y>1$, тогда $5^x-2=3^y$ делится на 9, т.е. $5^x$ при делении на 9 дает в остатке 2.

Заметим, $5^6-1$ делится на 9.

$5^n$ при делении на 9 дает остатки $5; 7; 8; 4; 2; 1$, следовательно, $x=5+6k$, где $k\in Z$, $k\geq 0$.

Так как $5^6-1$ делится на 7, то $5^x=5^{6n+5}=5^5(5^{6n}-1)+(5^5-1)=$ $=5^5(7a)+(7\cdot 446+3)=7b+3$, значит $3^y=5^x-2=7b+1$, т.е. $3^y$ при делении на 7 дает в остатке 1.

$3^n$ при делении на 7 дает остатки 3; 2; 6; 4; 5; 1, т.е. $y=6m$, где $m\in N$. Итак, $5^x-3^{6m}=2 \Leftrightarrow 5^x-3=3^{6m}-1$.

Так как $3^6-1$ делится на 13, то $3^{6m}-1$ делится на 13, значит $5^x-3$ делится на 13, однако $5^x$ при делении на 13 дает остатки 5; 12; 8; 1. Получено противоречие.

Ответ: $\{(1,1)\}$.

2) Предположим, $y$ нечетное число, тогда, согласно условию, имеем $(4+1)^x-4=(4-1)^y \Leftrightarrow (4a+1)-4=4b-1 \Leftrightarrow a-b-1=\dfrac{1}{2}$, где $a, b\in N$, что невозможно.

Итак, $y=2m$, $m\in N$.

Предположим, $x$ нечетное число, тогда согласно условию, имеем

$(6-1)^x = 3^y + 4 \Leftrightarrow \quad 6c - 1 = 3^y + 4 \Leftrightarrow \quad 2c - 3^{y-1} - 1 = \frac{2}{3}$, где $c \in N$, что невозможно. Итак, $x = 2n$, $n \in N$.

Имеем $5^{2n} - 3^{2m} = 4 \Leftrightarrow \quad (5^n - 3^m)(5^n + 3^m) = 4 \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5^n - 3^m = 1 \\ 5^n + 3^m = 4 \end{cases}$

или $\begin{cases} 5^n - 3^m = 2 \\ 5^n + 3^m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^n = 2{,}5 \\ 3^m = 1{,}5 \end{cases}$ или $\begin{cases} 5^n = 2 \\ 3^m = 0 \end{cases}$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

3) Предположим, $y$ нечетное.

Имеем $(4+1)^x = 8 + (4-1)^y \Leftrightarrow \quad 4a + 1 = 8 + (4b - 1) \Leftrightarrow$ $a - b - 2 = \frac{1}{2}$, где $a, b \in N$, что невозможно. Итак, $y = 2m$, $m \in N$.

Предположим, $x = 2n + 1$, $n \in N$.

Имеем $5^{2n+1} = 8 + 9^m \Leftrightarrow \quad 5(24+1)^n = 8 + (8+1)^m \Leftrightarrow$ $5(24c + 1) = 8 + (8d + 1) \Leftrightarrow \quad d - 15c + 1 = \frac{1}{2}$, где $c, d \in N$, что невозможно.

Итак, $x = 2n$, $n \in N$.

Имеем $5^{2n} - 3^{2m} = 8 \Leftrightarrow \quad (5^n - 3^m)(5^n + 3^m) = 8$ и так как $5^n \pm 3^m$ четные и $5^n - 3^m < 5^n + 3^m$, то $\begin{cases} 5^n - 3^m = 2 \\ 5^n + 3^m = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad 5^n = 3$, что невозможно.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

4) Рассуждениями, аналогичными пункту 2), заключаем, что $x$, $y$ четные числа, т.е. $x = 2n$, $y = 2m$, где $m, n \in N$.

Имеем $(5^n - 3^m)(5^n + 3^m) = 16$, причем $5^n \pm 3^m$ четные числа, $5^n - 3^m < 5^n + 3^m$, значит $\begin{cases} 5^n - 3^m = 2 \\ 5^n + 3^m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^n = 5 \\ 3^m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = n = 1 \Leftrightarrow$ $x = y = 2$.

Ответ: $\{(2, 2)\}$.

5) Имеем $2 + 3^y = (6+1)^z \Leftrightarrow \quad 2 + 3^y = 6a + 1 \Leftrightarrow \quad 3^{y-1} - 2a = -\frac{1}{3}$, где $a \in N$, что невозможно.

Ответ: 0.

6) Если $y=1$, то $z=1$. Предположим, $y \geq 2$, тогда $7^z - 4 = 3^y$ делится на 9.

$7^z$ при делении на 9 дает в остатке 5; 4; 1, значит $z = 3k+2$, где $k \in N$.

Имеем $7^{3k+2} = 3^y + 4 \Leftrightarrow \; 49\left(7^{3k}-1\right) = 3^y - 45$. Так как 19 делит $7^3 - 1$, $7^3 - 1$ делит $7^{3k} - 1$, то 19 делит $3^y - 45 = \left(3^y - 7\right) - 2 \cdot 19$, т.е. 19 делит $3^y - 7$.

$3^y$ при делении на 19 дает остатки 3; 9; 8; 5; 15; 7; 2; 6; 18; 16; 10; 11; 14; 4; 12; 17; 13; 1, значит $y = 18k + 6 = 2(3+9k) = 2n$, $n \in N$.

Имеем $7^{2n} - 4 = 3^y \Leftrightarrow \; \left(7^n - 2\right)\left(7^n + 2\right) = 3^y \Leftrightarrow \begin{cases} 7^n - 2 = 3^m \\ 7^n + 2 = 3^k \end{cases}$, где целые $m$, $k$ таковы, что $k > m \geq 0$, $m + k = y$, тогда $3^k - 3^m = 4 \Leftrightarrow$ $3^m\left(3^{k-m} - 1\right) = 4$, значит $3^m$ делит 4, т.е. $m = 0$, тогда $3^k = 5$, что невозможно.

Ответ: $\{1, 1\}$.

7) Если $y=1$, то $x=1$. Предположим, $y \geq 2$, тогда $10^x - 7 = 3^y$ делится на 9, однако $10^x - 7 = (9+1)^x - 7 = (9a+1) - 7 = 9a - 6$ не делится на 9. Получено противоречие.

Ответ: $\{1, 1\}$.

8) $2^x = 3^y + 5 \geq 3 + 5 = 8$, т.е. $x \geq 3$.

Если $x = 3$, то $y = 1$. Очевидно, $x \neq 4$.

Если $x = 5$, то $y = 3$. Предположим, $x \geq 6$, тогда $3^y + 5 = 2^x$ делится на 64, т.е. $\left(3^y - 59\right) + 64$ делится на 64, значит $3^y$ при делении на 64 дает в остаток 59.

$3^y$ при делении на 64 дает остатки 25; 11; 33; 35; 41; 59; 49; 19; 57; 43; 1, значит $y = 16k + 11$. Заметим, $3^{16} - 1$ делится на 17, значит $3^y = 3^{11+16k} = 3^{11}\left(3^{16k} - 1\right) + \left(3^{11} - 1\right) = 3^{11}(17a) + (10420 \cdot 17 + {}$ ${}+7) = 17b + 7$, где $a, b \in N$. Имеем $2^x = 3^y + 5 = 17b + 12$, однако $2^n$ при делении на 17 дает в остатке 2; 4; 8; 16; 15; 13; 9; 1, но не

12. Получено противоречие.

Ответ: $\{1, 1\}$.

131. 1) Из условия заключаем, что $n$ нечетное число. Так как $n>1$, то $m>1$, т.е. $m \geq 2$, значит $n^k+1=2^m$ делится на 4.

Если $k=2l$, то $n^k+1=n^{2l}+1=\left(n^l\right)^2+1=(2a+1)^2+1=$ $=4\left(a^2+a\right)+2$ не делится на 4.

Если $k=2l+1$, то $2^m=n^k+1=n^{2l+1}=(n+1)\cdot$ $\cdot\left(n^{2l}-n^{2l-1}+\ldots-n+1\right)$, значит $n+1$ делит $2^m$, следовательно, $n+1=2^s$, где $s \in N$, $s \leq m$. Если $s=m$, то $n^{2l}-n^{2l-1}+\ldots-n+1=1$, что невозможно, так как $n^{2l}-n^{2l-1}+\ldots-n+1=n^{2l-1}(n-1)+n^{2l-3}(n-1)+\ldots+n(n-1)+1>1$.

Итак, $s<m$, т.е. $m-s>0$, тогда $2^m=n^k+1=\left(2^s-1\right)^{2l+1}+1=$ $[\textit{по биному Ньютона}]=\left(b\cdot\left(2^s\right)^2+(2l+1)2^s-1\right)+1=2^s\left(2^s b+2l+1\right)$,

значит $2^{m-s}=2^s b+2l+1$, где $b \in N$, что невозможно, так как слева – четное число, справа – нечетное число.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2) Из условия заключаем, что $n$ нечетное число. Так как $k>1$, то $m>1$, т.е. $m \geq 2$, следовательно, $n^k-1=2^m$ делится на 4.

Если $k$ нечетное число, т.е. $k=2l+1$, то $2^m=n^k-1=n^{2l+1}-1=$ $=(n-1)\left(n^{2l}+n^{2l-1}+\ldots+n+1\right)$, значит $n+1$ делит $2^m$, т.е. $n+1=2^s$, где $s \in N$, $2 \leq s \leq m$ и так как $n^{2l}+\ldots+n+1>1$, то $n+1 \neq 2^m$, т.е. $s \neq m$, значит $s<m$.

Имеем $n^k+1=\left(2^s+1\right)^{2l+1}+1=[\textit{по биному Ньютона}]=$ $\left(b\left(2^s\right)^2+(2l+1)2^s+1\right)+1=2^s\left(2^s b+2l+1\right)+2=4c+2$, где $b, c \in N$,

т.е. $n^k+1=4c+2$ не делится на 4. Получено противоречие.

Итак, $k$ четное число, т.е. $k=2l$, $l \in N$. Имеем $n^k-1=\left(n^l-1\right)\left(n^l+1\right)=2^m \Leftrightarrow \begin{cases} n^l-1=2^a \\ n^l+1=2^b \end{cases}$, где целые $a$, $b$ таковы,

что $a+b=m$, $b>a \geq 0$. Имеем $2^b-2^a=2 \Leftrightarrow 2^a\left(2^{b-a}-1\right)=2$, значит $2^a$ делит 2, т.е. $a=0$ или $a=1$. Если $a=0$, то $2^b=3$, что невозможно. Если $a=1$, то $b=2$, $m=a+b=3$, $n^l=2^a+1=3$, $n=3$, $l=1$, $k=2l=2$.

Ответ: $\{(m, n, k)=(3, 3, 2)\}$.

132. Если $p=2$, то $m^n=6 \Leftrightarrow m=6$, $n=1$, что невозможно, так как $n>1$.

Пусть простое $p>2$, тогда $p$ нечетное число, $p=2q+1$, $q \in N$. Из условия заключаем, что $p$ делит $m^n$, значит $p$ делит $m$, т.е. $m=pl$, $l \in N$. Имеем $p\left(2^{p-1}-1\right)=(lp)^n \Leftrightarrow 2^{p-1}-1=l^n p^{n-1}$,

$$2^{2q}-1=l^n p^{n-1} \Leftrightarrow \left(2^q-1\right)\left(2^q+1\right)=l^n p^{n-1}. \qquad (1)$$

Предположим, существует нечетное простое $r$, которое делит $2^q \pm 1$, тогда $r$ делит $\left(2^q+1\right)-\left(2^q-1\right)=2$, что невозможно, так как $r$ нечетное число. Итак, $2^q \pm 1$ взаимно простые числа, тогда из (1) заключаем $2^q-1=s^n$ или $2^q+1=s^n$, тогда, согласно № 131, $q=3$, $s=3$, $n=2$, $p=2q+1=7$, значит $m=21$.

Ответ: $\{(p, m, n)=(7, 21, 2)\}$.

133. 1) Так как $2^x+3^y$ не делится на 3, то $z^2$ не делится на 3, т.е. $z=3k \pm 1$, где $k \in N$, тогда $z^2=3\left(3k^2 \pm 2k\right)+1$, следовательно, $z^2$ при делении на 3 дает в остатке 1. Если $x$ нечетное число, то

$2^x=2^{2m+1}=2(3+1)^m=2(3a+1)=6a+2$, тогда

$2^x+3^y=3\left(2a+3^{y-1}\right)+2$, т.е. $2^x+3^y$ дает в остатке 2 при делении на 3. Получено противоречие. Итак, $x=2k$, $k \in N$.

Имеем $3^y=z^2-2^{2k}=\left(z-2^k\right)\left(z+2^k\right)$, значит $\begin{cases} z-2^k=3^a \\ z+2^k=3^b \end{cases}$, где целые числа $a$, $b$ таковы, что $b>a \geq 0$, $a+b=y$, тогда $3^b-3^a=2^{k+1} \Leftrightarrow 3^a\left(3^{b-a}-1\right)=2^{k+1}$, значит $3^a$ делит $2^{k+1}$, т.е. $a=0$, тогда $3^b-1=2^{k+1}$, следовательно, $b=1$, $k=0$ или $b=2$, $k=2$ (см. № 129), однако $k \in N$, значит $b=2$, $k=2$, $y=a+b=2$, $x=2k=4$, $z^2=2^4+3^2=25$, $z=5$.

Ответ: $\{(4, 2, 5)\}$.

2) Так как $3^x+5^y$ не делится на 3, то $z^2$ не делится на 3, значит $z=3k \pm 1$, тогда $z^2$ при делении на 3 дает в остатке 1.

Если $y$ нечетное число, тогда $5^y = 5^{2m+1} = 5\cdot 25^m = 5(24+1)^m = 5(24a+1) = 3(40a+1)+2$, значит $5^y + 3^x = 3(40a + 3^{x-1}+1)+2$ при делении на 3 дает в остатке 2. Получено противоречие. Итак, $y$ – четное число.

Имеем $3^x + 5^{2k} = z^2 \Leftrightarrow 3^x = (z-5^k)(z+5^k)$, где $x = 2k$, $k \in N$, значит $\begin{cases} z-5^k = 3^a \\ z+5^k = 3^b \end{cases}$, где целые $a$, $b$ таковы, что $b > a \geq 0$, $a+b = y$, тогда $3^b - 3^a = 2\cdot 5^k \Leftrightarrow 3^a(3^{b-a}-1) = 2\cdot 5^k$, значит $3^a$ делит $2\cdot 5^k$, следовательно, $a = 0$, тогда $3^b - 1 = 2\cdot 5^k$.

Так как 5 делит $3^b - 1$, то $b = 4n$, где $n \in N$ (легко показать, что $3^{4n} - 1 = 81^n - 1$ делится на 5, а $3^{4n+1}-1$, $3^{4n+2}-1$, $3^{4n+3}-1$ не делятся на 5), тогда $3^{4n} - 1 = 2\cdot 5^k \Leftrightarrow (9^n-1)(9^n+1) = 2\cdot 5^k$ и так как $9^n \pm 1$ четные числа, то $(9^n-1)(9^n+1)$ делится на 4, однако $2\cdot 5^k$ не делится на 4.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

3) Предположим, $x$ нечетное число, т.е. $x = 2m+1$, тогда $2^x = 2\cdot 4^m = 2(5-1)^m = 2(5a\pm 1)$, значит $2^x + 5^y = 5(2a+5^{y-1})+2$ или $2^x + 5^y = 5(2a+5^{y-1}-1)+3$, т.е. $2^x + 5^y$ при делении на 5 дает остаток 2 или 3, однако $z^2$ при делении на 5 дает остатки 0; 1; 4. Действительно, $(5k)^2 = 5(5k^2)+0$; $(5k\pm 1)^2 = 5(5k^2 \pm 2k)+1$; $(5k\pm 2)^2 = 5(5k^2 \pm 4k)+4$.

Итак, $x$ – четное число, т.е. $x = 2m$, тогда $2^{2m} + 5^y = z^2 \Leftrightarrow 5^y = (z-2^m)(z+2^m) \Leftrightarrow \begin{cases} z-2^m = 5^a \\ z+2^m = 5^b \end{cases}$, где целые $a$, $b$ таковы, что $a+b = y$, $b > a \geq 0$, тогда $5^b - 5^a = 2^{m+1} \Leftrightarrow 5^a(5^{b-a}-1) = 2^{m+1}$, значит $5^a$ делит $2^{m+1}$, тогда $a = 0$, следовательно, $5^b - 1 = 2^{m+1}$, откуда находим $b = 1$, $m = 1$ (см. № 129), $\begin{cases} x = 2m = 2 \\ y = a+b = 1 \end{cases}$, $z^2 = 5^1 + 2^2 = 9$, $z = 3$.

Ответ: $\{(2, 1, 3)\}$.

134. 1) Предположим, $y$ – нечетное число, т.е. $y = 2m+1$, тогда $q^y = (4k-1)^{2m+1} = 4a-1$, значит $2^{x+1} + q^y = 4(2^{x-1} + a - 1) + 3$ дает в остатке 3 при делении на 4, однако $z^2$ при делении на 4 дает в остатке 0; 1.

Получено противоречие.

Итак, $y = 2k$, $k \in N$, тогда $2^{x+1} = z^2 - q^{2k} = (z - q^k)(z + q^k) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} z - q^k = 2^a \\ z + q^k = 2^b \end{cases}$, где целые $a$, $b$ таковы, что $x+1 = a+b$; $b > a \geq 0$, значит $2^b - 2^a = 2q^k$. **(1)**

Если $a = 0$, то в (1) левая часть – нечетное число, правая часть – четное число, что невозможно. Итак, $a \geq 1$, тогда $2^{b-1} - 2^{a-1} = q^k \Leftrightarrow$ $2^{a-1}(2^{b-1} - 1) = q^k$, значит $2^{a-1}$ делит нечетное число $q^k$, следовательно, $a = 1$, тогда $2^{b-1} - 1 = q^k$, значит $k = 1$ (см. № 131), т.е. $q = 2^{b-1} - 1 = 2^n - 1$, где $n = b-1$, т.е. $b = n+1$, $x = a + b - 1 = n+1$, $y = 2k = 2$, $z^2 = (2^n - 1)^2 + 2^{n+2} = (2^n + 1)^2$, $z = 2^n + 1$.

Ответ: если $q = 2^n - 1$, то $\{(n+1; 2; 2^n + 1)\}$;

если $q \neq 2^n - 1$, то $\{\varnothing\}$.

135. Если $y$ нечетное число, т.е. $y = 2n+1$, то $q^y = (pm-1)^{2n+1} = pa - 1$, где $a \in N$, значит $z^2 = p^x + q^y = p(a + p^{x-1}) - 1$, т.е. $z^2 + 1$ делится на $p$, где $p = 4k+3$, что противоречит теореме 4.5.

Итак, $y$ четное число, $y = 2n$, $n \in N$, тогда $p^x + q^{2n} = z^2 \Leftrightarrow$ $p^x = (z - q^n)(z + q^n)$, значит $\begin{cases} z - q^n = p^a \\ z + q^n = p^b \end{cases}$, где целые $a$, $b$ таковы, что $x = a + b$, $b > a \geq 0$, значит $p^b - p^a = 2q^n \Leftrightarrow$ $p^a(p^{b-a} - 1) = 2q^n$ и если $a > 0$, то $p$ делит $2q^n$, т.е. $p = 2$ или $p = q$, однако $p = 4k+3$, значит $p \neq 2$; $p = qm - 1$, значит $p \neq q$. Итак, $a = 0$, тогда $p^b - 1 = 2q^n = 2(pm-1)^n = 2(pc \pm 1)$, где $c \in N$, т.е. $p^b - 1 = 2pc \pm 2 \Leftrightarrow$ $p(p^{b-1} - 2c) = 1 \pm 2$, значит $p$ делит 1 или $p$

делит 3, что невозможно, так как $p=4k+3\geq 7$.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

136. 1) Если $x=1; 2; 3; 4$, тогда получаем следующие решения $\{(1,1,1),(4,2,2)\}$ (см. № 130). Предположим, $x\geq 5$, тогда $5^z-3^y=2^x$ делится на 32, т.е. числа $5^z$ и $3^y$ дают один и тот же остаток при делении на 32.

$5^m$ при делении на 32 дает остатки 5; 25; 29; 17; 21; 9; 13; 1, а $3^n$ дает остатки 3; 9; 27; 17; 19; 25; 11; 1. Итак, $(z=8k+2, y=8l+6)$ или $(z=8k+4, y=8l+4)$ или $(z=8k, y=8l)$.

В любом случае, числа $z$, $y$ четные, т.е. $z=2a$, $y=2b$, где $a,b\in N$, тогда $5^{2a}-3^{2b}=2^x \Leftrightarrow (5^a-3^b)(5^a+3^b)=2^x \Leftrightarrow$ $\begin{cases}5^a-3^b=2^c\\5^a+3^b=2^d\end{cases}$, где $d>c>0$; $d,c\in N$, $c+d=x$.

Имеем $2^d-2^c=2\cdot 3^b \Leftrightarrow 2^{c-1}(2^{d-c}-1)=3^b$, значит $2^{c-1}$ делит $3^b$, тогда $c=1$, следовательно, $3^b=2^{d-1}-1$, тогда $b=1$, $d=2$ или $b=2$, $d=4$ (см. № 129) $\Leftrightarrow x=a+b=2$ или $x=a+b=3$, что противоречит предположению.

Ответ: $\{(1,1,1),(4,2,2)\}$.

2) Если $x=1; 2$, то получаем решение $\{(2,1,1)\}$ (см. № 130).

Предположим, $x\geq 3$, тогда $7^z-3^y=2^x$ делится на 8, т.е. числа $7^z, 3^y$ при делении на 8 дают один и тот же остаток. $7^z$ при делении на 8 дает остатки 7; 1, а $3^y$ при делении на 8 дает остатки 2; 4; 8; 1, значит $z=2k$, $y=4n$, где $k,n\in N$.

Имеем $7^{2k}-3^{4n}=2^x \Leftrightarrow (7^k-9^n)(7^k+9^n)=2^x \Leftrightarrow$ $\begin{cases}7^k-9^n=2^a\\7^k+9^n=2^b\end{cases}$, где $b>a>0$; $b,a\in N$; $a+b=x$, тогда $2^b-2^a=2\cdot 9^n \Leftrightarrow 2^{a-1}(2^{b-1}-1)=9^n$, т.е. $2^{a-1}$ делит $9^n$, значит $a=1$, тогда $3^{2n}=2^{b-1}-1$, следовательно, $2n=1$, $b-1=2$ (см. № 129), что невозможно.

Ответ: $\{(2,1,1)\}$.

137. Если $z=1$, то $2^x3^y=6 \Leftrightarrow\ x=y=1$.

Предположим, $z\geq 2$, то $1+5^z=1+(4+1)^z=1+(4a+1)=4a+2$ не делится на 4, но делится на 2, значит $x=1$, тогда $2\cdot 3^y=1+5^z$. Так как $z\geq 2$, то $y\geq 2$, значит $1+5^z$ делится на 9, следовательно, $z=6k+3$, ибо $5^Z$ при делении на 9 дает остатки 5; 7; 8; 4; 2; 1, тогда $2\cdot 3^y=1+125^{2k+1}$ делится на $1+125=126=7\cdot 18$, однако $2\cdot 3^y$ не делится на 7.

Получено противоречие.

Ответ: $\{(1,1,1)\}$.

138. Если $y\geq 2$, $z\geq 2$, то $2^y+2^z5^t$ делится на 4, однако $1+5^x=1+(4+1)^x=1+(4a+1)=4a+2$ не делится на 4. Итак, $y=1$ или $z=1$.

Если $y=1$, тогда $1=5^x-2^z5^t \Leftrightarrow\ 5^{x-1}-2^z5^{t-1}=\dfrac{1}{5}$, что невозможно. Итак, $z=1$, тогда $5^x-2\cdot 5^t=2^y-1$, следовательно, $2^y-1$ делится на 5, значит $y=4k$, $k\in N$.

Имеем $5^x-2\cdot 5^t=16^k-1$. **(1)**

Если $t=1$, то $5^x-16^k=9$. Предположим, $x$ – нечетное число, тогда $(6-1)^x-(15+1)^k=9 \Leftrightarrow (6b-1)-(15c+1)=9 \Leftrightarrow 3(2b-5c-3)=2$, где $b,c\in N$, что невозможно. Итак, $x$ – четное число, т.е. $x=2l$, тогда $5^{2l}-16^k=9 \Leftrightarrow \left(5^l-4^k\right)\left(5^l+4^k\right)=9 \Leftrightarrow$ $\begin{cases}5^l-4^k=1\\5^l+4^k=9\end{cases} \Leftrightarrow\ 5^l=5,\ 4^k=4 \Leftrightarrow\ l=k=1,\ x=2l=2,\ y=4k=4,$ $z=1,\ t=1$.

Предположим, $t\geq 2$.

Имеем $2^y-1=5^x-2\cdot 5^t$, значит $5^x-2\cdot 5^t>0$, т.е. $5^x>2\cdot 5^t>5^t$, т.е. $x>y\geq 2$, значит $x\geq 3$.

Из (1) заключаем $16^k-1$ делится на 25, значит $k=5n$, $n\in N$, тогда $1+5^x=2^{20n}+2\cdot 5^t \Leftrightarrow\ 5^t\left(5^{x-t}-2\right)=\left(2^{10}\right)^{2n}-1$ делится на $2^{10}-1=11\cdot 93$, значит $5^{x-t}-2$ делится на 11, однако $5^s$ при делении на 11 дает остатки 5; 3; 4; 9; 1, но не 2.

Получено противоречие.

Ответ: $\{(2, 4, 1, 1)\}$.

139. Рассмотрим $p = 2$. Согласно условию, $2^p + 2^q = 2^q + 4$ делится на $q$, причем, согласно малой теореме Ферма, $2^q - 2$ делится на $q$, значит $q$ делит $(2^q + 4) - (2^q - 2) = 6$, т.е. $q = 2$ или $q = 3$, следовательно, $r = 2$.

Аналогично при $q = 2$ находим $p = 2$ или $p = 3$, значит $r = 2$.

Предположим, $p > 2$, $q > 2$, тогда $p$, $q$ нечетные числа.

Если $p = q$, то $2^{p+1} = p^2 r$, значит $p$ делит $2^{p+1}$, т.е. $p = 2$, тогда $r = 2$.

Пусть $p \neq q$. Согласно условию, $2^p + 2^q$ делится на $p$,причем $2^p - 2$ делится на $p$ (по малой теореме Ферма), значит $p$ делит $(2^p + 2^q) - (2^p - 2) = 2^q + 2$, следовательно, $p$ делит $(2^q)^p + 2^p$, тогда $p$ делит $(2^{pq} + 2^p) - (2^p - 2) = 2^{pq} + 2$. Аналогично $q$ делит $2^{pq} + 2$, следовательно, $2^{pq} + 2 = 2(2^{pq-1} + 1)$ делится на $pq$, тогда $pq$ делит $2^{pq-1} + 1$, ибо $pq$ нечетные числа. Пусть $pq = k$, тогда $k$ делит $2^{k-1} + 1$, где $k > 1$.

Покажем, что для любого $k \in N$ $(k > 1)$ $2^{k-1} + 1$ не делится на $k$. Предположим, $k$ делит $2^{k-1} + 1$, значит $k$ нечетное число. Пусть $k = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$, где $p_i$ различные простые числа, $m_i \in N$.

Пусть $p_i - 1 = 2^{l_i} t_i$, где $l_i \in N$, $t_i$ нечетное число. Так как $p_i^{m_i} - 1$ делится на $p_i - 1$, то $p_i^{m_i} - 1$ делится на $2^{l_i}$. Пусть для определенности $l_1 \le l_2 \le \dots \le l_n$, тогда для любого $i$: $p_i^{m_i} - 1$ делится на $2^{l_1}$, т.е. $p_i^{m_i} = 2^{l_1} s_i + 1$, где $s_i \in N$, тогда $k = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n} = (2^{l_1} s_1 + 1) \dots (2^{l_1} s_n + 1) = 2^{l_1} s + 1$, где $s \in N$, т.е. $k - 1$ делится на $2^{l_1}$.

Так как $k$ делит $2^{k-1} + 1$, то $p_1$ делит $2^{k-1} + 1$ и так как $t_1$ нечетное число, то $p_1$ делит $2^{(k-1)t_1} + 1 = 2^{2^{l_1} s t_1} + 1 = 2^{(p_1 - 1)s} + 1$.

Согласно же малой теореме Ферма, $p_1$ делит $2^{p_1 - 1} - 1$, значит $p_1$ делит $2^{(p_1 - 1)s} - 1$, таким образом, $p_1$ делит

$\left(2^{(p_1-1)s}+1\right)-\left(2^{(p_1-1)s}-1\right)=2$, что невозможно, ибо $p_1>2$.

Ответ: $\{(2, 2, 2), (3, 2, 2), (2, 3, 2)\}$.

140. 1) 1-й способ.

Если $x=1$, то $y=1$. Пусть $x>1$.

Из условия заключаем, что числа $x, y$ состоят из одних и тех же простых делителей. Пусть для определенности $y>x$ и пусть $x=p_1^{a_1}\ldots p_k^{a_k}$, $y=p_1^{b_1}\ldots p_k^{b_k}$, тогда, согласно условию, $p_1^{a_1y}\ldots p_k^{a_ky}=p_1^{b_1x}\ldots p_k^{b_kx}$, значит $a_iy=b_ix$; $i=1, 2, \ldots, k$, учитывая, что $y>x$, получаем $b_i>a_i$, значит $p_i^{a_1}\ldots p_k^{a_k}$ делит $p_1^{b_1}\ldots p_k^{b_k}$, т.е. $x$ делит $y$, значит $y=nx$, $n\in N$ $(n>1)$, тогда $x^{nx}=(nx)^x \Leftrightarrow x^n=nx \Leftrightarrow x^{n-1}=n$. **(1)**

Если $x>2$, то $x^{n-1}>2^{n-1}\geq n$, что противоречит (1).

Итак, $x=2$, следовательно, $2^y=y^2$, $y>x=2$, т.е. $y\geq 3$. Заметим, что если $y>4$, то $2^y>y^2$, значит $y\leq 4$. Итак, $y=3$ или $y=4$, однако $2^3<3^2$, $2^4=4^2$. Итак, $y=4$.

Аналогично предполагая, что $y<x$, получим $y=2$, $x=4$.

Ответ: $\{(2, 4), (4, 2)\}$.

2-й способ.

Пусть для определенности $x<y$.

Если $x=1$, то $y=1$.

Если $x=2$, то $y=4$ (см. 1–й способ)

Предположим, $x\geq 3$, тогда $y>x\geq 3$, т.е. $y>3$.

Имеем $x^y=y^x \Leftrightarrow \left(x^y\right)^{\frac{1}{xy}}=\left(y^x\right)^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}}=y^{\frac{1}{y}} \Leftrightarrow x=y$, так как $y>x\geq 3$ (см. № 106), что противоречит условию.

3-й способ.

Покажем справедливость следующей леммы.

Лемма. Пусть $x^a=y^b$, где $a, b, x, y$ натуральные числа, причем $(a, b)=1$, тогда существует натуральное число $z$, такое, что $x=z^b$, $y=z^a$.

Доказательство.

1-й способ.

Так как $x^a = y^b$, то $x$, $y$ содержат одни и те же простые делители. Пусть $x = p_1^{m_1} ... p_k^{m_k}$, $y = p_1^{n_1} ... p_k^{n_k}$, тогда, согласно условию, $p_1^{am_1} ... p_k^{am_k} = p_1^{bn_1} ... p_k^{bn_k}$, значит $am_i = bn_i$, где $i = 1, 2, ..., k$. Так как $b$ делит $am_i$, $(a, b) = 1$, то $b$ делит $m_i$ (см. теорему 1.4), т.е. $m_i = bl_i$, тогда $a(bl_i) = bn_i$, $n_i = al_i$, где $l_i \in N$. Пусть $z = p_1^{l_1} ... p_k^{l_k}$, тогда $x = p_1^{m_1} ... p_k^{m_k} = p_1^{bl_1} ... p_k^{bl_k} = z^b$.

Аналогично $y = z^a$.

2-й способ.

Так как $(a, b) = 1$, то, согласно теореме 1.2, существуют целые $m$, $n$ такие, что $am + bn = 1$.

Имеем $x = x^{am+bn} = (x^a)^m x^{bn} = (y^b)^m x^{bn} = (y^m x^n)^b = z^b$, где $z = x^n y^m$, $z \in Q$.

Так как $z \in Q$, $z^b \in N$, то $z \in N$.

Имеем $(z^b)^a = y^b \Leftrightarrow y = z$ .

Доказательство леммы окончено.

Пусть для определенности $y > x$.

Пусть $d = (x, y)$, тогда $x = da$, $y = db$, где $(a, b) = 1$, причем $b > a$ (так как $y > x$).

Имеем $x^y = y^x \Leftrightarrow x^{db} = y^{da} \Leftrightarrow x^b = y^a$, следовательно, существует $z$ $(z \in N)$, такое, что $x = z^a$, $y = z^b$, причем $b > a$, тогда $z^{b-a} = \dfrac{z^b}{z^a} = \dfrac{y}{x}$, т.е. $x$ делит $y$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны 1-му способу.

Ответ: $\{(2, 4), (4, 2)\}$.

2) 1-й способ.

Пусть для определенности $y > x$, тогда $y = kx$, где $k \in Q$, $k > 1$.

Имеем $x^{kx} = (kx)^x \Leftrightarrow x^k = kx \Leftrightarrow x^{k-1} = k$. Пусть $k - 1 = \dfrac{p}{q}$, где

$(p, q) = 1$, тогда $x = k^{\frac{1}{k-1}} = \left(\dfrac{p+q}{q}\right)^{\frac{q}{p}}$. **(2)**

Так как $(p, q)=1$, то $(p+q, q)=1$, следовательно, из (2) имеем

$$\begin{cases} p+q=m^p \\ q=n^p \end{cases}, \text{ где } m, n \in N, \text{ тогда } m^p-n^p=p, \qquad (3)$$

значит $m>n$, т.е. $m \geq n+1$.

Предположим, $p>1$, тогда имеем $m^p-n^p \geq (n+1)^p-n^p = ((n+1)-n)((n+1)^{p-1}+(n+1)^{p-2}n+\ldots+(n+1)n^{p-2}+n^{p-1})>p$, что противоречит (3).

Итак, $p=1$, следовательно, $k=1+\frac{1}{q}$, $x=\left(\frac{p+q}{q}\right)^{\frac{q}{p}}=\left(1+\frac{1}{q}\right)^q$,

$$y=kx=\left(1+\frac{p}{q}\right)x=\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q+1}.$$

Ответ:

$$\left\{\left(\left(1+\frac{1}{q}\right)^q, \left(1+\frac{1}{q}\right)^{q+1}\right); \left(\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q+1}, \left(1+\frac{1}{q}\right)^q\right), \textit{где } q \in N, q>1\right\}.$$

2-й способ.

Пусть для определенности $y>x$ и пусть $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \in N$, причем $(a, b)=1$, $(c, d)=1$, тогда $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}}=\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{bc}=\left(\frac{c}{d}\right)^{ad} \text{ и так как } (a, b)=1,\ (c, d)=1, \text{ то } \begin{cases} a^{bc}=c^{ad} \\ b^{bc}=d^{ad} \end{cases}. \qquad (4)$$

Пусть $(a, c)=m$, $(b, d)=n$, тогда $a=a_1m$, $c=c_1m$, $b=b_1n$, $d=d_1n$, где $(a_1, c_1)=1$, $(b_1, d_1)=1$ и так как $(a, b)=1$, $(c, d)=1$, то $(a_1, b_1)=1$, $(c_1, d_1)=1$, значит $(a_1d_1, b_1c_1)=1$.

Из (4) имеем $\begin{cases} a^{b_1c_1}=c^{a_1d_1} \\ b^{b_1c_1}=d^{a_1d_1} \end{cases}$, согласно лемме (см. выше), имеем

$$\begin{cases} a=z^{a_1d_1},\ c=z^{b_1c_1} \\ b=t^{a_1d_1},\ d=t^{b_1c_1} \end{cases}, \text{ где } z, t \in N.$$

Так как $y > x$, то $\frac{c}{d} > \frac{a}{b} \Leftrightarrow \ bc > ad \Leftrightarrow \ b_1c_1 > a_1d_1$. Имеем $t^{b_1c_1-a_1d_1} = \frac{d}{b}$, $z^{b_1c_1-a_1d_1} = \frac{c}{a}$, следовательно, $b$ делит $d$, $a$ делит $c$, т.е. $c = ap$, $d = bq$, где $p, q \in N$, значит $c_1 = a_1p$, $d_1 = b_1q$, тогда $p = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c}{a} = z^{b_1c_1-a_1d_1} = z^{(a_1p)b_1-a_1(b_1q)} = \left(z^{a_1b_1}\right)^{p-q} = u^{p-q}$, где $u = z^{a_1b_1}$.

Аналогично $q = v^{p-q}$, где $v = t^{a_1b_1}$, значит $u^{p-q} - v^{p-q} = p - q$, т.е. $u^r - v^r = r$, где $r = p - q$, где целое $r = p - q = \frac{c}{a} - \frac{d}{b} = \frac{bc - ad}{ab} > 0$.

Так как $u^r - v^r = r$, то $r = 1$ (см. № 140, 1), 1-й способ), тогда $\begin{cases} u - v = 1 \\ p - q = 1 \end{cases}$, значит $z^{a_1b_1} - t^{a_1b_1} = 1$, откуда $a_1b_1 = 1$, значит $a_1 = b_1 = 1$ (см. № 105, 5)), $z - t = 1$, следовательно, $p = \left(z^{a_1b_1}\right)^{u-v} = z$, $q = \left(t^{a_1b_1}\right)^{u-v} = t$.

Имеем $x = \frac{a}{b} = \frac{z^{a_1d_1}}{t^{a_1d_1}} = \frac{z^{d_1}}{t^{d_1}} = \left(\frac{z}{t}\right)^{b_1q} = \left(\frac{z}{t}\right)^{q} = \left(\frac{t+1}{t}\right)^{q} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{q}$.

Аналогично $y = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{q+1}$.

Ответ:

$$\left\{\left(\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q}, \left(1+\frac{1}{q}\right)^{q+1}\right), \left(\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q+1}, \left(1+\frac{1}{q}\right)^{1}\right), \text{где } q \in N, q > 1\right\}.$$

141. 1-й способ.

Пусть $\frac{y}{x} = z$ $(z \in Q)$, тогда $x^{x+zx} = (x+zx)^{zx} \Leftrightarrow$ $x^{1+z} = (x+zx)^z \Leftrightarrow \ x^{1+z} = x^z(1+z)^z \Leftrightarrow \ x = (1+z)^z$. Пусть $x = \frac{m}{n}$, $z = \frac{p}{q}$, где $(m, n) = 1$, $(p, q) = 1$, тогда $\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow$

$\frac{m^q}{n^q}=\frac{(p+q)^p}{q^p} \Leftrightarrow \quad m^q q^p = n^q (p+q)^p$, значит $n^q$ делит $m^q q^p$, причем $(m, n)=1$, следовательно, $n^q$ делит $q^p$.

Так как $(p, q)=1$, то $(p+q, q)=1$, значит $((p+q)^p, q^p)=1$, причем $q^p$ делит $n^q(p+q)^p$, следовательно, $q^p$ делит $n^q$.

Итак, $n^q = q^p$, тогда согласно лемме (№ 140), существует $k\ (k \in N)$: $n = k^p$, $q = k^q$. Если $q > 1$, то $k^q = q > 1$, т.е. $k > 1$, значит $q = k^q \geq 2^q$, что невозможно, так как для любого $q$ $q \in N$: $2^q > q$. Итак, $q = 1$, следовательно, $z = \frac{p}{q} = p$, $x = (1+p)^p$, $y = zx = z(1+z)^z = p(1+p)^p$, где $p \in N$.

Ответ: $\{((1+p)^p, p(1+p)^p): p \in N\}$.

2-й способ.

Имеем $x^x x^y = (x+y)^y \Leftrightarrow \quad x^x = \left(1+\frac{y}{x}\right)^y$. Так как $\left(1+\frac{y}{x}\right) \in Q$, $\left(1+\frac{y}{x}\right)^y \in N$, то $1+\frac{y}{x} \in N$, т.е. $x$ делит $y$, $y = zx$, $z \in N$, тогда $x = (1+z)^z$, $y = z(1+z)^z$, где $z \in N$ (см. 1-й способ).

3-й способ.

Пусть $d = (x, y)$, тогда $x = da$, $y = db$, где $(a, b) = 1$, значит $(a+b, b) = 1$, причем $x^{da+db} = (x+y)^{db} \Leftrightarrow \quad x^{a+b} = (x+y)^b$, следовательно, согласно лемме (№ 140), существует $t\ (t \in N)$, такое, что $\begin{cases} x+y = t^{a+b} \\ x = t^b \end{cases}$, тогда $t^a = \frac{t^{a+b}}{t^b} = 1+\frac{y}{x}$, значит $x$ делит $y$, т.е. $y = zx$, $z \in N$, следовательно, $x = (1+z)^z$, $y = (1+z)^z z$.

Ответ: $\{((1+z)^z; z(1+z)^z): z \in N\}$.

142. Если $n = 1$, то $x = y$.

Если $n = 2$, то $x^2 + (x+y)^2 = (x+2y)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-3y) = 0$, причем $x \geq 1$, $y \geq 1$, значит $x = 3y$.

Предположим, $n \geq 3$.

Пусть $x+y=z$ $(z \in N)$. Очевидно, $z>y$. Имеем $(z-y)^n+z^n=(z+y)^n$.

Пусть $d=(z, y)$, тогда $z=da$, $y=db$, где $(a, b)=1$, $a>b$, следовательно, $(a-b)^n+a^n=(a+b)^n$.

Рассмотрим нечетное $n$.

Согласно биному Ньютона, имеем $\left(a^n-na^{n-1}b+\ldots+nab^{n-1}-b^n\right)+a^n=a^n+na^{n-1}b+\ldots+nab^{n-1}+b^n \Leftrightarrow$ $\left(ma-b^n\right)+a^n=ka+b^n$, где $m, k \in N$, тогда $a\left(m-k+a^{n-1}\right)=2b^n$, значит $a$ делит $2b^n$, причем $(a, b)=1$, следовательно, $a=1$ или $a=2$, однако $a>b\geq 1$, следовательно, $a=2$ и так как $a>b$, то $b=1$, таким образом, $1+2^n=3^n$, что невозможно, ибо $3^n=(2+1)^n>2^n+1^n=2^n+1$ для любого $n\geq 3$. Получено противоречие.

Рассмотрим четное $n$.

Согласно биному Ньютона, имеем

$$\left(a^n-na^{n-1}b+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2}-nab^{n-1}+b^n\right)+a^n=$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2}+nab^{n-1}+b^n \Leftrightarrow$$

$$\left(a^2s-nab^{n-1}+b^n\right)+a^n=a^2t+nab^{n-1}+b^n \Leftrightarrow$$

$a^2\left(s-t+a^{n-2}\right)=2nab^{n-1}$, где $s, t \in N$, тогда $a\left(s-t+a^{n-1}\right)=2nb^{n-1}$.

Так как $a$ делит $2nb^{n-1}$, $(a, b)=1$, то $a$ делит $2n$,следовательно, $2n\geq a$.

Имеем $(a+b)^n=a^n+(a-b)^n \Leftrightarrow$ $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=1+\left(1-\frac{b}{a}\right)^n \Leftrightarrow$

$$1=(1+c)^n-(1-c)^n, \tag{1}$$

где $c=\frac{b}{a}$, $0<c<1$.

Заметим, что $(1+c)^n+(1-c)^n>2$ для любых значений $n$, $c$ $(0<c<1, n>1)$.

Действительно, $(1+c)^2+(1-c)^2=2+2c^2>2$.

Предположим, $(1+c)^n+(1-c)^n>2$ и докажем $(1+c)^{n+1}+(1-c)^{n+1}>2$.

Имеем $(1+c)^{n+1}+(1-c)^{n+1}=(1+c)(1+c)^n+(1-c)(1-c)^n=$ $\left((1+c)^n+(1-c)^n\right)+c\left((1+c)^n-(1-c)^n\right)>2+0=2$, что и требовалось доказать.

Покажем, что $(1+c)^n-(1-c)^n>2nc$, где $0<c<1$, $n\geq 3$.

Действительно, $(1+c)^3-(1-c)^3=6c+2c^3>3(2c)$.

Предположим, $(1+c)^n-(1-c)^n>2nc$ и докажем, что $(1+c)^{n+1}-(1-c)^{n+1}>2(n+1)c$.

Имеем $(1+c)^{n+1}-(1-c)^{n+1}=(1+c)(1+c)^n-(1-c)(1-c)^n=$ $\left((1+c)^n-(1-c)^n\right)+c\left((1+c)^n+(1-c)^n\right)>2nc+2c=2(n+1)c$, что и требовалось доказать.

Итак, $(1+c)^n-(1-c)^n>2nc=\dfrac{2n}{a}b\geq b\geq 1$, т.е. $(1+c)^n-$ $-(1-c)^n>1$, что противоречит (1).

Ответ: $\{(x,y,n):(y,y,1),(3y,y,2),\, где\ y\in N\}$.

143. 1) Если $n=1$, то $m=1$. Предположим, $n>1$.

Пусть $p$ наименьший простой делитель числа $n$, тогда $p$ делит $n$, $n$ делит $2^n-1$ (согласно условию), значит $p$ делит $2^n-1$, следовательно, $p$ – нечетное число. Согласно малой теореме Ферма, $p$ делит $2^{p-1}-1$. Пусть $k$ наименьшее возможное натуральное число, такое, что $p$ делит $2^k-1$.

Покажем справедливость следующей леммы.

Лемма. Пусть $m$ делит $a^n-1$, где $m,n,a\in N$ $(a>1)$ и пусть $k$ наименьшее натуральное число, такое, что $m$ делит $a^k-1$, тогда $k$ делит $n$.

Доказательство.

Предположим, $k$ не делит $n$, тогда разделим число $n$ на $k$ с остатком, т.е. $n=dk+r$, где $d,r\in N$, $0<r<k$.

Так как $m$ делит $a^k-1$, то $m$ делит $\left(a^k\right)^d-1$ (так как $b^d-1=(b-1)\left(b^{d-1}+\ldots+b+1\right)$).

Так как $m$ делит $a^n - 1 = a^{dk+r} - 1 = a^r(a^{dk} - 1) + (a^r - 1)$, $m$ делит $a^{dk} - 1$, то $m$ делит $a^r - 1$, причем $0 < r < k$, что противоречит определению $k$.

Таким образом, $r = 0$, значит $k$ делит $n$.

Лемма доказана.

Так как $p$ делит числа $2^n - 1$, $2^{p-1} - 1$, $2^k - 1$ и $k$ является наименьшим возможным таким числом, то, согласно лемме, $k$ делит $n$, $k$ делит $(p-1)$, значит $k \le p - 1 < p$.

Итак, $k$ делит $n$, $k < p$, следовательно, $k = 1$, ибо $p$ наименьший простой делитель числа $n$, тогда $p$ делит $2^k - 1 = 2 - 1 = 1$, т.е. $p$ делит 1, что невозможно. Получено противоречие.

Ответ: $\{(1, 1)\}$.

2) Если $n = 1$, то $m = 4$.

Предположим $n > 2$.

Пусть $p$ наименьший нечетный простой делитель числа n. Пусть $k$ наименьшее натуральное число, такое, что $p$ делит $3^k - 1$.

Очевидно, $k \ne 1$ (так как $p$ нечетное число). Так как $3^{2n} - 1 = (3^n - 1)(3^n + 1)$, $n$ делит $3^n + 1$, то $n$ делит $3^{2n} - 1$, значит $p$ делит $3^{2n} - 1$, следовательно, $p \ne 3$, тогда, согласно малой теореме Ферма, $p$ делит $3^{p-1} - 1$.

Так как $p$ делит числа $3^{2n} - 1$, $3^{p-1} - 1$, $3^k - 1$ и $k$ наименьшее возможное такое число, то, согласно лемме, $k$ делит числа $p - 1$, $2n$.

Так как $k$ делит $p - 1$, то $k \le p - 1 < p$, т.е. $k < p$. Если $k$ нечетное число, тогда $k$ делит $n$, ибо $k$ делит $2n$. Имеем $k$ делит $n$, $k < p$, однако $p$ наименьший простой делитель числа $n$, значит $k = 1$, в противном случае нашелся бы простой делитель $q$ числа $k$ такой, что $q < k$, $q$ делит $n$ (так как $k$ делит $n$), что противоречит определению числа $p$. Так как $k = 1$ и $p$ делит $3^k - 1 = 3 - 1 = 2$, то $p = 2$, что невозможно, ибо $p$ нечетное число.

Если $k = 2l$, $l \in N$, тогда $l < 2l = k < p$, $2l$ делит $2n$, т.е. $l < p$, $l$ делит $n$, значит $l = 1$, ибо $p$ наименьший простой делитель числа $n$, тогда $k = 2l = 2$, причем $p$ делит $3^k - 1 = 8$, что невозможно.

Получено противоречие.

Ответ: $\{(1;4)\}$.

144. Так как $a+1$ не является степенью двойки, то $a+1$ имеет нечетный простой делитель $p$.

Покажем справедливость следующей леммы.

Лемма: если $p^{k+1}$ делит $a^{p^k}+1$, где $a, p \in N$, $a>1$, $p$ нечетное простое, $k \in Z$ $(k \ge 0)$, то $p^{k+2}$ делит $a^{p^{k+1}}+1$.

Доказательство.

Пусть $p^{k+1}$ делит $a^{p^k}+1$, пусть $a^{p^k}=b$, тогда $p^{k+1}$ делит $b+1$.

Имеем $a^{p^{k+1}}+1=b^p+1=(b+1)(b^{p-1}-b^{p-2}+...-b+1)$, так как $p$ нечетное число.

Так как $p^{k+1}$ делит $b+1$, то $p$ делит $b+1$, значит $p$ делит числа $b^2-1=(b+1)(b-1)$, $(b^2)^m-1=b^{2m}-1$. Так как $p$ делит $b+1$, то $p$ делит $b^{2m-1}+1$, где $m \in N$.

Пусть $p=2l+1$, тогда $b^{p-1}-b^{p-2}+...-b+1=$ $=b^{2l}-b^{2l-1}+...-b+1=(b^{2l}-1)-(b^{2l-1}+1)+...-(b+1)+p$ делится на $p$ (так как все слагаемые делятся на $p$), значит $p^{k+2}$ делит $(b+1)(b^{p-1}-b^{p-2}+...-b+1)=b^p+1$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Так как $p$ делит $a+1$, то, по индукции, согласно лемме, $p^{k+1}$ делит $a^{p^k}+1$ для любого целого значения $k$ $(k \ge 0)$, следовательно, $p^k$ делит $a^{p^k}+1$, т.е. $n=1; p; p^2; p^3; \dots$

Что и требовалось доказать.

145. Если $n=1$, то $n$ делит $a^n+1$.

Предположим, $n>1$.

Пусть $p$ наименьший нечетный простой делитель числа $n$. Пусть $k$ наименьшее натуральное число, такое, что $p$ делит $a^k-1$.

Так как $a^{2n}-1=(a^n-1)(a^n+1)$, $n$ делит $a^n+1$, тогда $n$ делит $a^{2n}-1$, значит $p$ делит $a^{2n}-1$, следовательно, $p$ не делит $a$, т.е. $(a, p)=1$, значит , согласно малой теореме Ферма, $p$ делит $a^{p-1}-1$. Так как $p$ делит числа $a^{2n}-1$, $a^{p-1}-1$, $a^k-1$; $k$ наименьшее возможное такое число, то $k$ делит числа $p-1$, $2n$.

Так как $k$ делит $p-1$, то $k \le p-1 < p$, т.е. $k<p$.

Если $k$ нечетное число, тогда $k$ делит $n$, ибо $k$ делит $2n$. Имеем $k$ делит $n$, $k < p$, однако $p$ наименьший простой делитель числа $n$, значит $k = 1$, т.е. $p$ делит $a^k - 1 = a - 1$.

Если $k = 2l$, $l \in N$, то $l < 2l = k < p$, $k = 2l$ делит $2n$, т.е. $l < p$, $l$ делит $n$, значит $l = 1$, ибо $p$ наименьший простой делитель числа $n$, тогда $k = 2l = 2$, значит $p$ делит $a^k - 1 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$.

Итак, $p$ делит $a^2 - 1$. Согласно условию, $a + 1 = 2^m$, значит $p$ делит $a^2 - 1 = (2^m - 1)^2 - 1 = 2^{m+1}(2^{m-1} - 1)$, причем $p$ нечетное число, следовательно, $p$ делит $2^{m-1} - 1$, т.е. $2^{m-1} - 1 = ps$, $s \in N$, тогда $a = 2^m - 1 = 2(ps+1) - 1 = 2ps + 1$, причем $p$ делит $a^n + 1$ (так как $n$ делит $a^n + 1$), значит $p$ делит $(2ps+1)^n + 1 = (pd+1) + 1 = pd + 2$, следовательно, $p$ делит 2, что невозможно.

Ответ: $\{1\}$.

2) Так как $a + 1 = 2^m$, то $a^2 + 1 = 2(2^{2m-1} + 2^m + 1)$.

Пусть $p$ нечетный простой делитель числа $2^{2m-1} + 2^m + 1$, тогда $p$ делит $a^2 + 1$, причем $(a^2 + 1)$ четное число, значит $2p$ делит $a^2 + 1$. Покажем справедливость следующей леммы.

Лемма: пусть $2p^{k+1}$ делит $a^{2p^k} + 1$, где $p$ нечетное простое; $k \in Z$ $(k \geq 0)$ $a, p \in N$ $(a > 1)$, тогда $2p^{k+2}$ делит $a^{2p^{k+1}} + 1$.

Доказательство.

Пусть $a^{2p^k} = b$, тогда $2p^{k+1}$ делит $b + 1$.

Так как 2 делит $b + 1$, тогда 2 делит $b^p + 1$.

Так как $p^{k+1}$ делит $b + 1$, тогда $p^{k+2}$ делит $b^p + 1$ (см. доказательство леммы (№ 144)), таким образом, $2p^{k+2}$ делит $b^p + 1 = a^{2p^{k+1}} + 1$.

Лемма доказана.

Так как $2p$ делит $a^2 + 1$, то по индукции заключаем, что $2p^{k+1}$ делит $a^{2p^k} + 1$, значит $2p^k$ делит $a^{2p^k} + 1$, т.е. $n = 2; 2p; 2p^2; \ldots$

Что и требовалось доказать.

146. Если $y$ четное число, т.е. $y = 2k$, тогда $x^2 = 4(2k^2 + 1) + 3$ при делении на 4 дает в остатке 3, что невозможно.

Итак, $y$ нечетное число.

Имеем $x^2 + 1 = y^3 + 8 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$. **(1)**

Так как $y$ нечетное число, тогда числа $y+2$, $y^2-2y+4$ также нечетные.

Всякое нечетное число имеет вид $4m+1$ или $4m+3$. Предположим, $y+2=4a+1$, $y^2-2y+4=4b+1$, тогда $y=4a-1$, $(4a-1)^2-2(4a-1)+4=4b+1 \Leftrightarrow \quad b-4a^2+4a=1{,}5$, где $a,b \in Z$, что невозможно. Итак, хотя бы одно из чисел $y+2$, $y^2-2y+4$ имеет вид $4m+3$, причем всякое число вида $4m+3$ имеет простой делитель такого же вида.

Пусть этим простым делителем является число $r=4l+3$, тогда, согласно (1), $r$ делит $x^2+1^2$, что противоречит теореме 4.5.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

147. Если $x$ четное число, т.е. $x=2k$, тогда $5y^2=8k^3-13 \Leftrightarrow$ $(5y)^2=4(10k^3-17)+3$, что невозможно, так как полный квадрат при делении на 4 дает в остатке 0 или 1, но не 3.

Итак, $x$ нечетное число.

Имеем $x^3-8=5(y^2+1) \Leftrightarrow \ (x-2)((x-1)^2+3)=5(y^2+1)$. Так как $x$ нечетное число, то $x=4k+1$ или $x=4k+3$, где $k \in Z$. Если $x=4k+1$, то $x-2=4(k-1)+3$, значит $x-2$ содержит простой делитель такого же вида, а именно, $4m+3$. Если $x=4k+3$, то $(x-1)^2+3=4(2k-1)^2+3$, тогда $(x-1)^2+3$ содержит простой делитель вида $4m+3$. Итак, в любом случае, существует простое число $p=4m+3$, которое делит $x^3-8$, значит $p$ делит $5(y^2+1)$.

Так как $p=4m+3$, то $p \neq 5$, однако, $p$ делит $5(y^2+1)$, значит $p$ делит $y^2+1$, что противоречит теореме 4.5.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

148. Предположим, $x$ четное число, т.е. $x=2m$, $m \in N$, тогда $y^2=(2m)^3+4^z-1=4(2m^3+4^{z-1}-1)+3$, т.е. $y^2=4t+3$, где $t \in Z$, что невозможно.

Итак, $x$ нечетное число, следовательно, $x=4m+1$ или $x=4m+3$, где $m \in Z$.

Если $x=4m+3$, то $y^2=(4m+3)^3-4^z-1=$ $=4(16m^3+36m^2+27m+6)+3$, что невозможно.

Рассмотрим $x=4m+1$.

Имеем $y^2+4^z=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

Так как $x^2+x+1=(4m+1)^2+(4m+1)+3=4(4m^2+3m)+3$, то существует простое число $p$ вида $4n+3$, которое делит $x^2+x+1$, значит $p$ делит $y^2+4^z$.

Так как $x$ нечетное число, тогда $y$ четное число, т.е. $y=2^k t$, где $k,t\in N$; $t$ нечетное число, тогда $y^2+4^z=4^k t^2+4^z$.

Рассмотрим $k\geq z$. Простое $p=4n+3$ делит $y^2+4^z=$ $=4^z\left(\left(2^{k-z}t\right)^2+1\right)$, значит $p$ делит $s^2+1$, где $s=2^{k-z}t$ (ибо $(p,2)=1$), что противоречит теореме 4.5.

Рассмотрим $k<z$. Простое $p=4n+3$ делит $y^2+4^z=4^k\left(t^2+\left(2^{z-k}\right)^2\right)$, значит $p$ делит $t^2+\left(2^{z-k}\right)^2$ (ибо $(p,2)=1$), что противоречит теореме 4.5 (ибо $t$, $2^{z-k}$ взаимно простые числа).

Ответ: $\{\varnothing\}$.

149. Пусть $\sqrt[3]{x+\sqrt{8y^2-1}}=a$, $\sqrt[3]{x-\sqrt{8y^2-1}}=b$, тогда $a+b=z \Leftrightarrow$ $a^3+b^3+3ab(a+b)=z^3 \Leftrightarrow$ $\left(x+\sqrt{8y^2-1}\right)+(x-$ $-\sqrt{8y^2-1})+3abz=z^3 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x^2-8y^3+1}z=z^3-2x$.

Если $z=0$, то $x=0$, $y$ нечетное натуральное число. Предположим $z\neq 0$, то $\sqrt[3]{x^2-8y^3+1}=t$, где $t=\dfrac{z^3-2x}{3z}$, $t\in Q$.

Так как $t\in Q$, $t^3=x^2-8y^3+1\in Z$, то $t\in Z$. Имеем $t^3+8y^3=x^2+1$.

Предположим, $t$ четное число, т.е. $t=2k$, тогда $x^2=4(2y^2+2k^3-1)+3$, что невозможно. Имеем

$x^2+1=(2y+t)(4y^2-2ty+t^2)$.

Так как $t$, $y$ нечетные числа, то $t-y=2s$, $s\in Z$, тогда $4y^2-2ty+t^2=(t-y)^2+3y^2=(2s)^2+3(2r+1)^2=4(s^2+3r^2+3r)+$ $+3$, следовательно, существует простое число $p$ вида $4k+3$, которое делит $4y^2-2ty+t^2$, значит $p=4k+3$ делит $x^2+1$, что противоречит теореме 4.5.

Ответ. $\{(0, y, 0) : y \in N, y$ *нечетное число*$\}$.

150. 1) Согласно биному Ньютона, имеем $(x+1)^z = ax+1$, где $a \in N$, тогда $x^y - (ax+1) = 1 \Leftrightarrow x(z^{z-1} - a) = 2$, т.е. $x$ делит 2, значит $x = 1$ или $x = 2$.

Если $x = 1$, то $1^y - 2^z = 1$, что невозможно.

Если $x = 2$, то $2^y - 3^z = 1$, значит $y = 2$, $z = 1$ (см. №129).

Ответ: $\{(2, 2, 1)\}$.

2) Имеем $x^y - (x^t + 1)^z = 1 \Leftrightarrow x^y - (ax+1) = 1$, где $a \in N \Leftrightarrow$ $x(x^{y-1} - a) = 2$, т.е. $x$ делит 2, значит $x = 1$ или $x = 2$. Очевидно, $x \neq 1$.

Если $x = 2$, то $2^y - (2^t + 1)^z = 1$.

Если $t = 1$, то $y = 2$, $z = 1$ (см. № 129).

Предположим, $t \geq 2$, тогда $2^y = (2^t + 1)^z + 1 > 2^{2z}$, т.е. $y > 2z \geq 2$, значит $y \geq 3$.

Имеем $2^y - (2^t + 1)^z = 1 \Leftrightarrow$ $2^y - (4 \cdot 2^{t-2} + 1)^z = 1 \Leftrightarrow$ $2^y - (4b+1) = 1$, где $b \in N \Leftrightarrow$ $2^{y-2} - b = \dfrac{1}{2}$, что невозможно.

Ответ: $\{(2; 2; 1; 1)\}$.

3) Если $x = 1$, то $y = 1$, $z$ –любое натуральное число.

Рассмотрим $x \geq 2$. Если $z = 1$, то $(x+1)^y = x+1$, т.е. $y = 1$, $x$ любое натуральное число.

Если $z \geq 2$, то $(x+1)^y = x^z + 1 \geq x^2 + 1 > x + 1$, т.е. $y > 1 \Leftrightarrow$ $y \geq 2$.

Пусть $x$ нечетное число, тогда, согласно биному Ньютона, имеем $(x+1)^y = ax^2 + y \cdot x + 1$, где $a \in N$, значит $(ax^2 + xy + 1) - x^z = 1 \Leftrightarrow$ $y = x(x^{z-2} - a)$, т.е. $x$ делит $y$. Пусть $y = bx$, где $b \in N$.

Имеем $(x+1)^{bx} - x^z = 1 \Leftrightarrow ((x+1)^x)^b - 1 = x^z$. **(1)**

Пусть $(x+1)^x = c$, тогда $c^b - 1 = x^z \Leftrightarrow (c-1)(c^{b-1} + \ldots + c + 1) =$ $= x^z$, т.е. $c - 1$ делит $x^z$ $\Leftrightarrow (x+1)^x - 1$ делит $x^z$.

Согласно биному Ньютона, $(x+1)^x - 1 = (dx^3 + C_x^2 x^2 + C_x^1 x +$ $+1) - 1 = \left(dx^3 + \dfrac{x(x-1)}{2}x^2 + x \cdot x + 1\right) - 1 = x^3\left(d + \dfrac{x-1}{2}\right) + x^2 =$

$=x^3s+x^2$, где $s\in N$ (так как $\dfrac{x-1}{2}$ целое число), следовательно, $x^3s+x^2$ делит $x^z$, т.е. $xs+1$ делит $x^{z-2}$, однако числа $xs+1$, $x$ взаимно просты, значит $xs+1$, $x^{z-2}$ также взаимно просты, таким образом, $xs+1=1\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^x-1}{x^2}=1\Leftrightarrow (x+1)^x=x^2+1$. Так как $x$ нечетное число, бо́льшее 1, то $x\geq 3$, тогда $(x+1)^x\geq (x+1)^3>(x+1)^2>x^2+1$.

Получено противоречие.

Пусть $x$ четное число и пусть $x=l-1$, тогда $l$ нечетное число. Имеем $l^y-(l-1)^z=1$, причем $l=x+1\geq 3$. Если $l=3$, то $y=z=1$ или $y=2$, $z=3$ (см. № 129).

Предположим, $l\geq 4$. Если $z$ четное число, то $(l-1)^z=lr+1$, где $r\in N$, следовательно, $l^y-(lr+1)=1\Leftrightarrow\ l(l^{y-1}-r)=2$, т.е. $l$ делит 2, что невозможно, так как $l\geq 4$.

Итак, $z$ нечетное число, тогда, согласно биному Ньютона, имеем $(l-1)^z=l^2a+lz-1$, где $a\in N$, тогда $l^y-(l^2a+lz-1)=1\Leftrightarrow$ $z=l(l^{y-2}-a)$, т.е. $l$ делит z. Пусть $z=bl$, где $b\in N$.

Имеем $l^y=(l-1)^{bl}+1$. Пусть $(l-1)^l=c$, тогда $l^y=c^z+1=$ $=(c+1)(c^z-c^{z-1}+\ldots-c+1)$, значит $c+1$ делит $l^y$, т.е. $(l-1)^l+1$ делит $l^y$. Согласно биному Ньютона, имеем $(l-1)^l+1=$

$$=(l^3d-C_l^2l^2+C_l^1l-1)+1=\left(l^3d-\frac{l(l-1)}{2}l^2+l\cdot l-1\right)+1=$$

$=l^2\left(l\left(d+\dfrac{l-1}{2}\right)+1\right)=l^2(ls+1)$, где $s\in N$, значит $l^2(ls+1)$ делит $l^y$, следовательно, $ls+1$ делит $l^{y-2}$, однако $ls+1$ и $l^{y-2}$ взаимно просты, таким образом, $ls+1=1\Leftrightarrow \dfrac{(l-1)^l+1}{l^2}=1\Leftrightarrow$ $(l-1)^l=l^2-1$.

Так как $l\geq 4$, значит $(l-1)^l\geq (l-1)^4=(l(l-2)+1)^2\geq$ $\geq (2l+1)^2>l^2-1$.

Получено противоречие.

Ответ: $\{(1,1,t),(t,1,1),(2,2,3): t\in N\}$.

4) $t=1$ (см. 3)).

Пусть $t\ge 2$. Имеем $1=(x^t+1)^y-x^z\ge x^t+1-x^z$, т.е. $1\ge x^t+1-x^z \Leftrightarrow z\ge t$.

Если $z=t$, то $(x^t+1)^y-x^t=1\Leftrightarrow y=1$.

Предположим, $z>t>1$, т.е. $z-1\ge t$. Согласно биному Ньютона, имеем $(x^t+1)^y=a(x^t)^2+yx^t+1$, тогда $(ax^{2t}+yx^t+1)-x^z=1\Leftrightarrow y=x(x^{z-t-1}-ax^{t-1})$, т.е. $x$ делит $y$. Пусть $y=bx$, где $b\in N$.

Имеем $(x^t+1)^{bx}-1=x^z \Leftrightarrow \left((x^t+1)^x\right)^b-1=x^z$, значит $(x^t+1)^x-1$ делит $x^z$, т.е. число $(x^t+1)^x-1=$
$=\left(cx^{3t}+\frac{x(x-1)}{2}x^{2t}+x\cdot x^t+1\right)-1=x^{t+1}\left(cx^{2t-1}+\frac{x(x-1)}{2}x^{t-1}+1\right)$
делит число $x^z$, значит $A=cx^{2t-1}+\frac{x(x-1)}{2}x^{t-1}+1$ делит $x^{z-t-1}$, однако $A$ и $x^{z-t-1}$ взаимно простые числа.

Действительно, предположим, существует простое $p$, которое делит числа $A$, $x^{z-t-1}$, тогда $p$ делит $A$, $x$, значит $p$ делит $A-\left(cx^{2t-1}-\frac{x(x-1)}{2}x^{t-1}\right)=1$, что невозможно.

Так как $A$ делит $x^{x-t-1}$ и $(A,x^{z-t-1})=1$, то $A=1\Leftrightarrow$
$\frac{(x^t+1)^x-1}{x^{t+1}}=1\Leftrightarrow (x^t+1)^x=x^{t+1}+1$.

Очевидно, $x=1$. Предположим, $x\ge 2$, тогда $(x^t+1)^x\ge (x^t+1)^2>x^{2t}+1\ge x^{t+1}+1$, что невозможно.

Ответ: если $t=1$, то $(x,y,z)=$
$=\{(1,1,n),(n,1,1),(2,2,3),\ где\ n\in N\}$;
если $x=1$, то $y=1$; $z$, $t$ – любые натуральные числа;
если $x\ge 2$, $t\ge 2$, $t\ne z$, то $\{\varnothing\}$;
если $x\ge 2$, $t\ge 2$, $t=z$, то $y=1$.

# Литература

1. Базылев Д. Ф. 100 олимпиадных задач по математике. Мн.: НТЦ "АПИ", 1997.
2. Берник В. И., Жук К. И., Мельников О. В. Сборник олимпиадных задач по математике. Мн.: Нар. асвета, 1980.
3. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988.
4. Зарубежные математические олимпиады // Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф. и др./ Под ред. И. Н. Сергеева. М.: Наука, 1987.
5. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М.: Просвещение, 1968.
6. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. М.: Мир, 1978.
7. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: Просвещение, 1968.

# Содержание